Application du calcul fractionnaire au problème du tautochrone généralisé

Tautochrone et Dérivé fractionnaire

Damien Rioux Lavoie
Département de mathématiques et de statistique

7 novembre 2014

Université de Montréal

1695 : L'Hôpital demande à Leibniz la signification de $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$.
Leibniz lui répond : *"An apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn."*

1695 : L'Hôpital demande à Leibniz la signification de $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$. Leibniz lui répond : *"An apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn."*

1819 : Lacroix mentionne pour la première fois le principe de dérivée d'ordre arbitraire de la fonction $f(x) = x^p$. Il obtient le même résultat que pour les définitions actuelles.

Université de Montréal

1695 : L'Hôpital demande à Leibniz la signification de $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$. Leibniz lui répond : *"An apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn."*

1819 : Lacroix mentionne pour la première fois le principe de dérivée d'ordre arbitraire de la fonction $f(x) = x^p$. Il obtient le même résultat que pour les définitions actuelles.

1823 : Abel trouve une première application au calcul fractionnel en résolvant le problème du tautochrone sous un potentiel gravitationnel.

1695 : L'Hôpital demande à Leibniz la signification de $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$. Leibniz lui répond : *"An apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn."*

1819 : Lacroix mentionne pour la première fois le principe de dérivée d'ordre arbitraire de la fonction $f(x) = x^p$. Il obtient le même résultat que pour les définitions actuelles.

1823 : Abel trouve une première application au calcul fractionnel en résolvant le problème du tautochrone sous un potentiel gravitationnel.

1832 : Liouville a publié trois longs mémoires sur le sujet, mais les définitions sont très restrictives.

- 1695 : L'Hôpital demande à Leibniz la signification de $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ pour $n = \frac{1}{2}$. Leibniz lui répond : *"An apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn."*
- 1819 : Lacroix mentionne pour la première fois le principe de dérivée d'ordre arbitraire de la fonction $f(x) = x^p$. Il obtient le même résultat que pour les définitions actuelles.
- 1823 : Abel trouve une première application au calcul fractionnel en résolvant le problème du tautochrone sous un potentiel gravitationnel.
- 1832 : Liouville a publié trois longs mémoires sur le sujet, mais les définitions sont très restrictives.
- 1847 : Riemann, durant ses études a écrit un article sur le sujet. Sa définition a pour défaut l'utilisation d'une fonction complémentaire indéterminée.

Plusieurs grands mathématiciens ont contribué au sujet. Par exemple : Euler, Fourier, Heavyside, Caylay, Peacock, Riesz, Weyl, Caputo, Hadamard et plusieurs autres.

Soit ${}_0D_t^{\alpha}$, un opérateur fractionnaire. Les propriétés que l'on désire trouver sur ces opérateurs sont :

- Si une fonction est analytique, alors sa dérivée fractionnelle est analytique ;

Soit ${}_0D_t^{\alpha}$, un opérateur fractionnaire. Les propriétés que l'on désire trouver sur ces opérateurs sont :

- Si une fonction est analytique, alors sa dérivée fractionnelle est analytique ;
- si $\alpha = n$ est un entier, alors ${}_0D_t^{n}$ correspond à la définition usuelle de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre entier ;

Soit ${}_0D_t^{\alpha}$, un opérateur fractionnaire. Les propriétés que l'on désire trouver sur ces opérateurs sont :

- Si une fonction est analytique, alors sa dérivée fractionnelle est analytique ;
- si $\alpha = n$ est un entier, alors ${}_0D_t^{n}$ correspond à la définition usuelle de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre entier ;
- si $\alpha = 0$, alors ${}_0D_t^{0} = I$ est l'opérateur identité ;

Université de Montréal

Soit ${}_0D_t^{\alpha}$, un opérateur fractionnaire. Les propriétés que l'on désire trouver sur ces opérateurs sont :

- Si une fonction est analytique, alors sa dérivée fractionnelle est analytique ;
- si $\alpha = n$ est un entier, alors ${}_0D_t^{n}$ correspond à la définition usuelle de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre entier ;
- si $\alpha = 0$, alors ${}_0D_t^{0} = I$ est l'opérateur identité ;
- sous certaines conditions, ces opérateurs commutes ;

Soit ${}_0D_t^{\alpha}$, un opérateur fractionnaire. Les propriétés que l'on désire trouver sur ces opérateurs sont :

- Si une fonction est analytique, alors sa dérivée fractionnelle est analytique ;
- si $\alpha = n$ est un entier, alors ${}_0D_t^{n}$ correspond à la définition usuelle de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre entier ;
- si $\alpha = 0$, alors ${}_0D_t^{0} = I$ est l'opérateur identité ;
- sous certaines conditions, ces opérateurs commutes ;
- ce sont des opérateurs linéaires.

Définition (Espace $\mathcal{C}$)

Espace des fonctions à valeurs réelles continues sur $(0, \infty)$ et intégrable sur tout sous-intervalle bornée de $[0, \infty)$

Définition (Espace $\mathcal{C}$)

Espace des fonctions à valeurs réelles continues sur $(0, \infty)$ et intégrable sur tout sous-intervalle bornée de $[0, \infty)$

Définition (Espace $\mathfrak{C}$)

Sous-espace de $\mathcal{C}$ dont les éléments sont de la forme $t^\lambda \eta(t)$ ou $t^\lambda \ln(t)\eta(t)$, avec $\lambda > -1$. Ici, $\eta(t)$ est une fonction entière.

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

pour $t > 0$.

Définition (Riemann-Liouville)

Soit $\nu > 0$, f une fonction de classe $\mathcal{C}$ et $t > 0$. Alors, l'intégrale fractionnaire Riemann-Liouville d'ordre ν de $f(t)$ est :

$$ {}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right] := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1} $$

Si $\nu = 0$,

$$ {}_0J_t^{0}\left[f(t)\right] := I[f(t)] = f(t) \tag{2} $$

- La preuve que cette définition, avec $\nu = n$, correspond à celle de l'intégrale usuelle se fait par induction en utilisant la règle de Leibniz pour dériver sous une intégrale.
- On a :
$$\lim_{t \to 0} {}_0J_t^0 \left[f(t)\right] = 0$$
lorsque $f(t)$ est continue.
- Il est possible de démontrer que $\nu \to 0$ implique ${}_0J_t^{\nu} \left[f(t)\right] \to I$. (Preuve d'analyse !)
- La linéarité découle de la linéarité de l'intégrale usuel.

Théorème (Composition d'intégrale fractionnaire)

Soit $\nu, \mu > 0$ *et* f *une fonction continue. Alors, pour* $t > 0$ *:*

$$ {}_0J_t^{\nu}\left[{}_0J_t^{\mu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu+\mu}\left[f(t)\right] \tag{3} $$

Théorème (Composition d'intégrale fractionnaire)

Soit $\nu, \mu > 0$ *et* f *une fonction continue. Alors, pour* $t > 0$ *:*

$$ {}_0J_t^{\nu}\left[{}_0J_t^{\mu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu+\mu}\left[f(t)\right] \tag{3} $$

Démonstration.

Une façon élégante de démontrer ce théorème est de remarquer qu'il est vrai que pour tout polynôme $P(t)$, puis d'utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass. Pour se faire, on a besoin de la linéarité et des fonctions Gamma et Bêta. □

Lemme

Soit $\nu > 0$, *et* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]$ *une fonction continue. Alors, pour* $t > 0$ *:*

$$ {}_0J_t^{\nu+1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]\right] = {}_0J_t^{\nu}[f(t)] - \frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu} \tag{4} $$

et

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[{}_0J_t^{\nu}[f(t)]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1} \tag{5} $$

Lemme

Soit $\nu > 0$, $\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]$ *une fonction continue et* p *un entier naturel. Alors, pour* $t > 0$ *:*

$$ {}_0J_t^{\nu+p}\left[\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right] - \mathcal{Q}_p(t,\nu) \tag{6}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[{}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]\right] + \mathcal{Q}_p(t,\nu-p) \tag{7}$$

Où

$$\mathcal{Q}_p(t,\nu) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left[f(0)\right] \tag{8}$$

Université de Montréal

Corollaire

Sous les mêmes conditions que le lemme précédent et si $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left[f(0)\right] = 0$ *pour* $k = 0, 1, \ldots, p-1$, *alors :*

$$ {}_0J_t^{\nu+p}\left[\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right] $$

$$ \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[{}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]\right] $$

Corollaire

Sous les mêmes conditions que le lemme précédent et si $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left[f(0)\right] = 0$ *pour* $k = 0, 1, ..., p-1$, *alors :*

$$
{}_0J_t^{\nu+p}\left[\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[{}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu}\left[\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[f(t)\right]\right]
$$

Théorème (Dérivée usuelle de l'intégrale fractionnaire)

Soit p *un entier naturel,* f *une fonction continument différentiable et* $\nu > p$. *Alors, pour* $t \geq 0$ *:*

$$
\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}\left[{}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0J_t^{\nu-p}\left[f(t)\right] \tag{9}
$$

On sait que

$$ {}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10} $$

Posons $t = g(x)$, $\tau = g(\psi)$ et $f(t) = h(g^{-1}(t)) = h(x)$. Si $g^{-1}(0) = 0$ et g est continument différentiable et bijective alors :

$$ {}_0J_{g(x)}^{\nu}\left[h(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (g(x)-g(\psi))^{\nu-1} h(\psi) g'(\psi)\,\mathrm{d}\psi \tag{11} $$

On sait que

$$ {}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10} $$

Posons $t = g(x)$, $\tau = g(\psi)$ et $f(t) = h(g^{-1}(t)) = h(x)$. Si $g^{-1}(0) = 0$ et g est continument différentiable et bijective alors :

$$ {}_0J_{g(x)}^{\nu}\left[h(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (g(x)-g(\psi))^{\nu-1} h(\psi) g'(\psi)\,\mathrm{d}\psi \tag{11} $$

Théorème (Intégrale fractionnaire par rapport à une fonction)

Soit $g^{-1}(0) = 0$ *et* g *une fonction continument différentiable et inversible sur l'intervalle fermée* $[0, T]$. *Aussi, soit* $f \in \mathcal{C}$ *et* $\nu > 0$. *Alors, pour* $0 < t \leq T$ *:*

$$ {}_0J_{g(x)}^{\nu}\left[f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (g(x)-g(\tau))^{\nu-1} f(\tau) g'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{12} $$

Université de Montréal

Définition (Riemann-Liouville)

Soit $\mu > 0$, $f \in \mathcal{C}$ et $t > 0$. Alors, nous définissons la dérivée fractionnaire Riemann-Liouville d'ordre μ :

$$
{}_0D_t^{\mu}\left[f(t)\right] = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left[{}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right] \tag{13}
$$

où $\nu = \mu - m$ and $m = \lfloor \mu \rfloor + 1$. Si $\nu = 0$,

$$
{}_0D_t^{0}\left[f(t)\right] := I[f(t)] = f(t) \tag{14}
$$

Définition (Riemann-Liouville)

Soit $\mu > 0$, $f \in \mathcal{C}$ et $t > 0$. Alors, nous définissons la dérivée fractionnaire Riemann-Liouville d'ordre μ :

$$ {}_0D_t^{\mu}\left[f(t)\right] = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left[{}_0J_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right] \tag{13} $$

où $\nu = \mu - m$ and $m = \lfloor \mu \rfloor + 1$. Si $\nu = 0$,

$$ {}_0D_t^{0}\left[f(t)\right] := I[f(t)] = f(t) \tag{14} $$

Remarque

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe toujours si f est m fois continument différentiable, donc si f est analytique.

- La preuve que cette définition avec $\nu = n$ correspond à celle de la dérivé usuel (lorsqu'elle est n fois continument différentiable) provient de l'identité :

$$ {}_0D_t^n\left[f(t)\right] = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[f(t)\right] $$

- Il est possible de démontrer que si la fonction est analytique dans $(0, \infty)$, alors sa dérivée fractionnaire l'est aussi.(Preuve d'analyse !)
- La linéarité découle de la linéarité de l'intégrale et de la dérivée usuelle.
- Notez que si ν n'est pas un entier naturel, nous perdons la localité de l'opérateur.

Théorème (Composition de dérivée fractionnaire)

Soit $f(t) \in \mathfrak{C}$ *et* $t > 0$. *Alors :*

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[{}_0D_t^{\mu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0D_t^{\nu+\mu}\left[f(t)\right] \tag{15} $$

pour tout $0 < t < \infty$ *si l'une ou l'autre de ces conditions est satisfaites :*

- *si* $\mu < \lambda + 1$ *et* ν *est arbitraire*
- *si* $\mu \geq \lambda + 1$, ν *est arbitraire et* $a_k = 0$ *pour* $k = 0, 1, ..., m - 1$ *où* m *est le plus petit entier plus grand ou égal à* μ *et les* a_k *sont les coefficients de la série de Taylor de* $\eta(t)$.

Université de Montréal

Théorème (Composition de dérivée fractionnaire)

Soit $f(t) \in \mathfrak{C}$ *et* $t > 0$*. Alors :*

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[{}_0D_t^{\mu}\left[f(t)\right]\right] = {}_0D_t^{\nu+\mu}\left[f(t)\right] \tag{15} $$

pour tout $0 < t < \infty$ *si l'une ou l'autre de ces conditions est satisfaites :*

- *si* $\mu < \lambda + 1$ *et* ν *est arbitraire*
- *si* $\mu \geq \lambda + 1$, ν *est arbitraire et* $a_k = 0$ *pour* $k = 0, 1, ..., m - 1$ *où* m *est le plus petit entier plus grand ou égal à* μ *et les* a_k *sont les coefficients de la série de Taylor de* $\eta(t)$*.*

Remarque

μ *peut être négatif ! Aussi, si l'une ou l'autre des conditions est satisfaite, alors* ${}_0D_t^{\mu}\left[f(t)\right] \in \mathfrak{C}$

Université de Montréal

Théorème (Théorème fondamental du calcul fractionnaire)

Soit $f(t) \in \mathfrak{C}$, $\nu, \mu > 0$ *et* $t > 0$. *Alors, On aura :*

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[f(t)\right] = \left[{}_0J_t^{\mu}\left[f(t)\right]\right]_{\mu=-\nu} := {}_0J_t^{-\nu}\left[f(t)\right] \tag{16}$$

En particulier,

$$ {}_0J_t^{\mu}\left[f(t)\right] = \left[{}_0D_t^{\nu}\left[f(t)\right]\right]_{\nu=-\mu} := {}_0D_t^{-\mu}\left[f(t)\right] \tag{17}$$

Alors,

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[{}_0D_t^{-\nu}\left[f(t)\right]\right] = I[f(t)] = f(t) \tag{18}$$

Remarque

L'ordre est important !

Par le théorème précédent et celui de l'intégrale fractionnaire par rapport à une fonction on déduit

Théorème (Intégrale fractionnaire par rapport à une fonction)

Soit $g^{-1}(0) = 0$ *et* g *une fonction continument différentiable et inversible sur l'intervalle fermée* $[0, T]$. *Aussi, soit* $f \in \mathfrak{C}$ *et* $\nu > 0$. *Alors, pour* $0 < t \leq T$ *:*

$$ {}_0D^{\mu}_{g(x)}\left[f(x)\right] = {}_0J^{-\mu}_{g(x)}\left[f(x)\right] \tag{19}$$

Par le théorème précédent et celui de l'intégrale fractionnaire par rapport à une fonction on déduit

Théorème (Intégrale fractionnaire par rapport à une fonction)

Soit $g^{-1}(0) = 0$ *et* g *une fonction continument différentiable et inversible sur l'intervalle fermée* $[0, T]$. *Aussi, soit* $f \in \mathfrak{C}$ *et* $\nu > 0$. *Alors, pour* $0 < t \leq T$ *:*

$$_0D^{\mu}_{g(x)}\left[f(x)\right] = {}_0J^{-\mu}_{g(x)}\left[f(x)\right] \tag{19}$$

Remarque

Le théorème fondamental du calcul fractionnaire reste valide sur $[0, T]$.

Soit $f(t) = t^p$ où $p > -1$ et $\nu, \mu > 0$. Alors,

$$
\begin{aligned}
{}_0J_t^{\nu}\left[t^p\right] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} \tau^p \, \mathrm{d}\tau = \frac{B(p+1,\nu)}{\Gamma(\nu)} t^{p+\nu} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\nu+1)} t^{p+\nu}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Soit $f(t) = t^p$ où $p > -1$ et $\nu, \mu > 0$. Alors,

$$
\begin{aligned}
{}_0J_t^{\nu}\left[t^p\right] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}\tau^p \,\mathrm{d}\tau = \frac{B(p+1,\nu)}{\Gamma(\nu)}t^{p+\nu} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\nu+1)}t^{p+\nu}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

et, si $\nu = m - \mu$:

$$
\begin{aligned}
{}_0D_t^{\mu}\left[t^p\right] &= \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\nu+1)}t^{p+\nu}\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\nu-m+1)}t^{p+\nu-m} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\mu+1)}t^{p-\mu}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Par conséquent, on voit que l'on a pour tout ν :

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[t^p\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\nu+1)}t^{p-\nu} \tag{22} $$

Par conséquent, on voit que l'on a pour tout ν :

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[t^p\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\nu+1)} t^{p-\nu} \tag{22} $$

En particulier, si $p = 0$, on obtient pour $f(t) = K$:

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[1\right] = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} t^{-\nu} \tag{23} $$

Par conséquent, on voit que l'on a pour tout ν :

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[t^p\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\nu+1)} t^{p-\nu} \tag{22} $$

En particulier, si $p = 0$, on obtient pour $f(t) = K$:

$$ {}_0D_t^{\nu}\left[1\right] = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} t^{-\nu} \tag{23} $$

et

$$ {}_0D_{g(t)}^{\nu}\left[1\right] = \frac{K}{\Gamma(-\nu+1)} (g(t))^{-\nu} \tag{24} $$

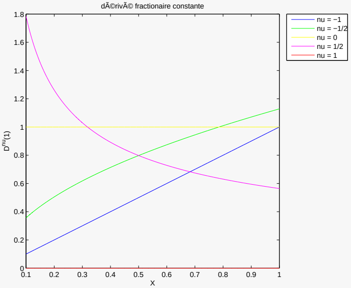

Figure : Dérivée fractionnaire de la fonction constante $f(x) = 1$

Animation

Université de Montréal

Supposons qu'un fil mince C est placé dans le premier quadrant du plan et qu'une bille glisse sans friction sur ce fil sous l'action d'un champ potentiel arbitraire. On suppose que la vitesse initiale de la bille est nulle. La courbe C dont le temps de descente T pour aller d'un point de départ P à l'origine est indépendant de P est appelée courbe tautochrone.

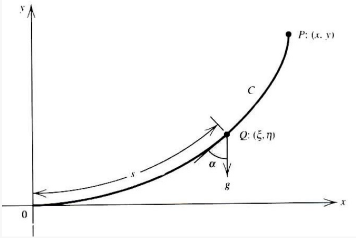

Figure : Schéma pour un champ gravitationnel

Soit un potentiel arbitraire $mV(y)$ s'annulant à l'origine analytique et inversible sur $[0, y0]$, une paramétrisation de C donné par $(x(y), y)$ et le point de départ $P = (x_0, y_0)$. Aussi, s est la longueur d'arc de C mesuré de l'origine à un point $(x(y), y)$ de C.

Université de Montréal

Soit un potentiel arbitraire $mV(y)$ s'annulant à l'origine analytique et inversible sur $[0, y0]$, une paramétrisation de C donné par $(x(y), y)$ et le point de départ $P = (x_0, y_0)$. Aussi, s est la longueur d'arc de C mesuré de l'origine à un point $(x(y), y)$ de C. Par le principe de conservation de l'énergie, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s]\right)^2 = V(y_0) - V(y) \tag{25}$$

Soit un potentiel arbitraire $mV(y)$ s'annulant à l'origine analytique et inversible sur $[0, y0]$, une paramétrisation de C donné par $(x(y), y)$ et le point de départ $P = (x_0, y_0)$. Aussi, s est la longueur d'arc de C mesuré de l'origine à un point $(x(y), y)$ de C. Par le principe de conservation de l'énergie, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[s]\right)^2 = V(y_0) - V(y) \tag{25}$$

Donc,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{V(y_0) - V(y)}} = -\sqrt{2}\mathrm{d}t \tag{26}$$

Par dérivée en chaîne et en divisant par $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{V'(y)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V(y)}}{\sqrt{V(y_0)-V(y)}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{d}t$$

Par dérivée en chaîne et en divisant par $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{V'(y)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V(y)}}{\sqrt{V(y_0) - V(y)}} \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{d}t \tag{27}$$

En intégrant de $t = 0$ a $t = T$, donc de $y = y_0$ à $y = 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{s(y_0)}^{0} \frac{V'(y)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V(y)}}{\sqrt{V(y_0) - V(y)}} \mathrm{d}y = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} T \tag{28}$$

Par dérivée en chaîne et en divisant par $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{V'(y)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V(y)}}{\sqrt{V(y_0) - V(y)}}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{d}t \tag{27}$$

En intégrant de $t = 0$ a $t = T$, donc de $y = y_0$ à $y = 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{s(y_0)}^{0} \frac{V'(y)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}V(y)}}{\sqrt{V(y_0) - V(y)}}\,\mathrm{d}y = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}T \tag{28}$$

Posons $f(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V(y)}[s]$. Alors :

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{0}^{y_0} \frac{f(y)V'(y)}{\sqrt{V(y_0) - V(y)}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T \tag{29}$$

Le coté gauche correspond à l'intégrale fractionnaire de $f(y)$ par rapport à $V(y)$ d'ordre $\frac{1}{2}$. Nous pouvons donc réécrire le tout comme suit :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}T = {}_0D_{V(y)}^{-\frac{1}{2}}\left[f(t)\right] \tag{30}$$

Le coté gauche correspond à l'intégrale fractionnaire de $f(y)$ par rapport à $V(y)$ d'ordre $\frac{1}{2}$. Nous pouvons donc réécrire le tout comme suit :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}T = {}_0D_{V(y)}^{-\frac{1}{2}}[f(t)] \tag{30}$$

Par le Théorème fondamental du calcul fractionnaire et puisque $T \in \mathfrak{C}$:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}{}_0D_{V(y)}^{\frac{1}{2}}[T] \tag{31}$$

Le coté gauche correspond à l'intégrale fractionnaire de $f(y)$ par rapport à $V(y)$ d'ordre $\frac{1}{2}$. Nous pouvons donc réécrire le tout comme suit :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}T = {}_0D^{-\frac{1}{2}}_{V(y)}\left[f(t)\right] \tag{30}$$

Par le Théorème fondamental du calcul fractionnaire et puisque $T \in \mathfrak{C}$:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}{}_0D^{\frac{1}{2}}_{V(y)}\left[T\right] \tag{31}$$

T constante nous donne donc :

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{V(y)}} \tag{32}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V(y)}[s] = \frac{\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{V(y)}} \tag{33}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V(y)}[s] = \frac{\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{V(y)}} \tag{33}$$

Par dérivée en chaîne, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[s] = \frac{V'(y)\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{V(y)}} \tag{34}$$

Potentiel arbitraire

Université de Montréal

En substituant la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[s] = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[x]\right)^2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[x] = \sqrt{\frac{2}{V(y)}\left(\frac{V'(y)T}{\pi}\right)^2 - 1} \tag{35}$$

En substituant la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[s] = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[x]\right)^2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[x] = \sqrt{\frac{2}{V(y)}\left(\frac{V'(y)T}{\pi}\right)^2 - 1} \tag{35}$$

Par conséquent, le tautochrone est donné par la paramétrisation :

$$x(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{2}{V(\tau)}\left(\frac{V'(\tau)T}{\pi}\right)^2 - 1}\,\mathrm{d}\tau \tag{36}$$

Si $V(y) = gy$ et $V'(y) = g$ nous obtenons :

$$x(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{2T^2 g}{\pi^2 \tau} - 1}\, \mathrm{d}\tau \tag{37}$$

Si $V(y) = gy$ et $V'(y) = g$ nous obtenons :

$$x(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{2T^2 g}{\pi^2 \tau} - 1}\,\mathrm{d}\tau \tag{37}$$

Posons $a = \frac{T^2 g}{\pi^2}$ et $\tau = 2a\sin^2\theta$. Alors,

$$4a \int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{38}$$

Si $V(y) = gy$ et $V'(y) = g$ nous obtenons :

$$x(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{2T^2 g}{\pi^2 \tau} - 1}\,\mathrm{d}\tau \tag{37}$$

Posons $a = \frac{T^2 g}{\pi^2}$ et $\tau = 2a\sin^2\theta$. Alors,

$$4a \int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{38}$$

Donc, en posant $\phi = 2\arcsin\sqrt{\frac{y}{2a}}$, nous observons que C est un cycloïde !

- $x = a(\phi + \sin\phi)$
- $y = a(\phi - \cos\phi)$

Il existe d'autres définitions selon nos besoins et le type de fonction avec lequel nous désirons travailler.
Aussi, il est aussi possible de généraliser les équations différentielles à des équations différentielles fractionnelles. Ceux-ci ont beaucoup d'applications dans les domaines de l'ingénierie et de la physique, par exemple :

- Traitement du signal
- Diffusion dans des milieux poreux
- Conservation de la masse fractionnelle
- Modèles financiers
- Mécanique quantique
- Physiques des particules

Référence

E. Flores. *The Tautochrone Under Arbitrary Potentials Using Fractional Derivatives*. Am. j. Phys., **67** : 718–722, 1999.

I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. First edition, 1999.

B. Ross. *A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus*. Frac. Cal. Appl., **57** : 1–36, 1975.

B. Ross et K. Miller. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. first edition, 1993.