Méthode SPH implicite d'ordre 2 appliquée à des fluides incompressibles

Smoothed-particle hydrodynamics

Damien Rioux Lavoie
Université de Montreal

2 janvier 2016

Table des matières

- C'est une méthode sans maillage utilisant un formalisme lagrangien.
- Développé par Gingold et Monaghan en 1977 et, indépendamment la même année, par Lucy.
- Développement par Cummins, en 1999, d'une méthode complètement incompressible utilisant la méthode de projection développée par Chorin en 1968.
- Avantages : Interprétation naturelle, traitement des géométries complexes, traitement des déformations du domaine, calcul concentré là où il y a des particules...
- Application : Astrophysique, écoulements multi-phases, écoulements avec surface libre, impacts et explosions...

- Weakly compressible smoothed-particle hydrodynamics (WCSPH)
  - On suppose que le fluide est légèrement compressible.
  - Introduis une vitesse du son pour relier la pression et la densité volumique.
  - Entraîne une condition CFL très stricte sur le pas de temps.
  - Fluctuation de la densité peut conduire à des oscillations importantes de la pression et donc de l'instabilité.
  - Réflection sur les frontières.
- Projection smoothed-particle hydrodynamics (PSPH)
  - Complètement incompressible.
  - Méthode de projection introduisant des champs auxiliaires.
  - Solutions plus lisses.
  - Les conditions aux limites à appliquer sur les champs auxiliaires sont non triviales.

- Écoulement planaire dans un intervalle de temps $I = (-\epsilon, \epsilon) \subset [-T, T]$.
- Temps initial $t = 0$.
- Soit Ω_0, ouvert, le domaine géométrique en $t = 0$, munie de la frontière $\Gamma_0 = \bar{\Omega}_0 \setminus \Omega_0$.
- Soit Ψ le domaine matériel.il s'agit de l'ensemble des étiquettes i des particules matérielles.
- Soit $i \in \Psi$, partant de la position initiale $\underline{\xi}_i \in \Omega_0$. la trajectoire de i, noté $\underline{x}_i(t)$, est la solution de :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{x}_i(t) = \underline{u}(\underline{x}_i(t), t) \quad t \in I, \quad \underline{x}_i(t_0) = \underline{\xi}_i$$

ou $\underline{u} \colon \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ est le champs de vitesse de l'écoulement.

- Soit la famille d'application $\{S(t)\}_{t\in I}$, nommé le flot, définit par :

$$\begin{aligned} S(t) : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \underline{\xi}_i &\mapsto S(t)\underline{\xi}_i = \underline{x}_i(t) \end{aligned}$$

- On définit $\Omega(t) = S(t)\Omega_0 = \left\{ S(t)\underline{\xi}_i \,\middle|\, \underline{\xi}_i \in \Omega_0 \right\}$ et $\Gamma(t) = S(t)\Gamma_0$.
- On définit la dérivée matérielle :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t} f(\underline{x}_i, t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\underline{x}_i(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}_i, t) + \underline{u}(\underline{x}_i, t) \cdot \underline{\nabla} f(\underline{x}_i, t) \end{aligned}$$

- Nous allons employer la notation $\Omega \times I = \bigcup_{t\in I} \Omega(t) \times \{t\}$.

Nous avons deux approches différentes pour décrire l'écoulement :

Eulérien $(\underline{x}, t)$: On étudie un point arbitraire $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ et considérons le champs de vitesse $\underline{u}(\underline{x}, t)$ en ce point. On étudie donc le domaine géométrique Ω.

Lagrangien $(\underline{\xi}_i, t)$: On étudie une particule $i \in \Psi$, de coordonnée initiale $\underline{\xi}_i \in \Omega_0$, et considérons sa trajectoire $\underline{x}_i(t) = S(t)\underline{\xi}_i$. On étudie donc le domaine matériel Ψ.

Nous allons nous concentrer sur l'approche lagrangienne.

- Un fluide incompressible, est un fluide tel que $\frac{\mathrm{D}\,\rho}{\mathrm{D}\,t} = 0$, ou $\rho \colon \Omega \times I \to \mathbb{R}$ est la densité .
- Un fluide newtonien est un fluide dont dont la vitesse de déformation est une fonction linéaire du gradient de la vitesse.
- Les equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible newtonien sont :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{D}\,\underline{u}}{\mathrm{D}\,t} = \dfrac{1}{\rho}\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} \qquad \text{dans} \quad \Omega \times I \\ \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \eta \left(\underline{\nabla}\,\underline{u} + (\underline{\nabla}\,\underline{u})^{\mathsf{T}} \right) \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \qquad \text{dans} \qquad \text{dans} \quad \Omega \times I \end{array}}$$

ou $\underline{f} \colon \Omega \times I \to \mathbb{R}^2$ la force par unité de masse associée à la force externe $\underline{F}_V$, η est la viscosité et $\underline{\underline{\sigma}} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ le tenseur des contraintes.

- Soit L une longueur de référence et U une vitesse de référence, de l'écoulement.
- Les variables adimensionnées sont :

$$\underline{x} = L\underline{x}^{\star}\,,\ \underline{u} = U\underline{u}^{\star}\,,\ t = \frac{L}{U}t^{\star}\,,\ p = \frac{\eta U}{L}p^{\star}\,,\ \underline{f} = \frac{U^2}{L}\underline{f}^{\star}\,.$$

- On définit le nombre de Reynold $\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\eta}$, une constante sans dimension.

- On suppose que la viscosité est constante
- On obtient la forme de Laplace des équations de Navier-Stokes adimensionnés :

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\mathrm{D}\,\underline{u}}{\mathrm{D}\,t} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(-\underline{\nabla} p + \Delta \underline{u}\right) + \underline{f} \qquad \text{dans} \quad \Omega \times I \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \qquad \text{dans} \qquad\quad \text{dans} \quad \Omega \times I \end{array}}$$

- Nous avons laissé tomber la notation étoilée.

Université de Montréal

Theorem (Théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge)

Soit $\underline{\xi} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$*, où* Ω *est un domaine ouvert de frontière* Γ *supposée lipschitzienne. Alors, il existe un champ vectoriel* $\underline{A}$ *et un champ scalaire* ϕ*, définis sur* $\overline{\Omega}$*, tels que :*

$$\underline{\xi} = \underline{\nabla} \times \underline{A} + \underline{\nabla}\phi = \underline{u} + \underline{\nabla}\phi$$

Remarque

- *Certaines hypothèses de l'énoncé peuvent être affaiblies.*
- *Lorsque* $\Gamma \neq \emptyset$*, il n'est pas toujours possible de garantir l'orthogonalité, au sens de* L^2*, de la décomposition et elle n'est jamais unique. En effet, ceci dépendra des conditions aux frontières imposées sur* $\underline{u}$ *et* ϕ*.*

- Soit Δt, un intervalle de temps et la notation $t^n = n\Delta t$.
- Nous allons utiliser les notations $\underline{x}_i^n$ et g_i^n pour désigner les valeurs approximatives de $\underline{x}_i(t^n)$ et $g(\underline{x}_i(t^n), t^n)$.
- On intègre la forme de Laplace de t^n a t^{n+1} le long des trajectoires $\underline{x}_i(t)$.
- On discrétise à l'aide d'une différence centrée, de la méthode du trapèze et celle du point milieu pour obtenir $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.
- On découple la vitesse de la pression à l'aide du théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge :

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^* - \Delta t \underline{\nabla} \phi^{n+1}$$

où nous choisissons ϕ^{n+1} de façon à forcer l'incompressibilité de $\underline{u}^{n+1}$.

Nous obtenons le schéma temporel d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t^2)$:

$$\boxed{\begin{gathered}
\underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{2\,\mathrm{Re}}\Delta \underline{u}_i^* = \underline{u}_i^n + \Delta t\left[-\frac{1}{\mathrm{Re}}\underline{\nabla} q^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}}\right] \\
\Delta \phi_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\underline{\nabla}\cdot \underline{u}_i^* \\
\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^* - \Delta t \underline{\nabla}\phi_i^{n+1} \\
q^{n+\frac{1}{2}} = p_i^{n+\frac{1}{2}} - \mathrm{Re}\,\phi_i^{n+1} + \frac{1}{2}\underline{\nabla}\cdot \underline{u}_i^* + K \\
\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}\right)
\end{gathered}}$$

En posant $q^{n+\frac{1}{2}} = 0$, nous obtenons le schéma PMIII :

$$\boxed{\begin{gathered}
\underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{2\,\mathrm{Re}}\Delta \underline{u}_i^* = \underline{u}_i^n + \Delta t\left[\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}\Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}}\right] \\
\Delta \phi_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\underline{\nabla}\cdot \underline{u}_i^* \\
\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^* - \Delta t \underline{\nabla}\phi_i^{n+1} \\
p_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathrm{Re}\,\phi_i^{n+1} - \frac{1}{2}\underline{\nabla}\cdot \underline{u}_i^* + K \\
\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2}\left(\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}\right)
\end{gathered}}$$

Lorsque nous posons $q^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}}$, nous obtenons un schéma nommé PMII.

- Identité de convolution :

$$f\left(\underline{x}\right) = \int_{\Omega} f\left(\underline{x}'\right) \delta\left(\underline{x} - \underline{x}'\right) \, \mathrm{d}\underline{x}'$$

  où δ est la distribution de Delta-Dirac.
- On approxime $\delta\left(\underline{x}\right)$ par une fonction de lissage $W\left(\underline{x}, h\right)$, munie d'une longueur de lissage h définissant un support compact.
- Approximation de lissage :

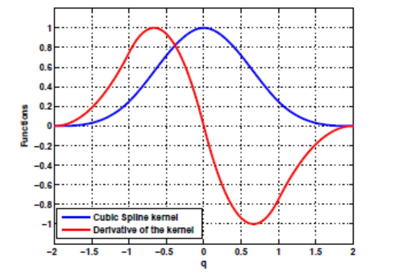
$$\left\langle f\left(\underline{x}\right)\right\rangle = \int_{\Omega} f\left(\underline{x}'\right) W\left(\underline{x} - \underline{x}', h\right) \, \mathrm{d}\underline{x}'$$

- Pour bien approximer δ, W doit satisfaire :
  1. Aire unité : $\int_\Omega W(\underline{x}, h)\,\mathrm{d}\underline{x} = 1$.
  2. Convergence au sens des distributions : $\lim_{h\to 0} W(\underline{x}, h) = \delta(\underline{x})$.
- Les propriétés additionnelles suivantes sont aussi suggérées :
  3. Support compact sphérique : $\exists k > 0$ tel que $W(\underline{x}, h) = 0$ lorsque $|\underline{x}| > kh$.
  4. Symétrie : $W(\underline{x}, h) = W(-\underline{x}, h)$
  5. Décroissance : Elle doit décroître rapidement à mesure que l'on s'éloigne de $\underline{x} = \underline{0}$.

Nous avons opté pour la fonction spline cubique définie par :

$$W(r,h) = w_0 \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3 & \text{si } 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{6}(2-q)^3 & \text{si } 1 \leq q < 2 \\ 0 & \text{si } q \geq 2 \end{cases}$$

où $q = \frac{r}{h}$ et, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $w_0 = \frac{15}{7\pi h^2}$.



le support compact est de rayon $2h$.

- Notons $B_{\underline{x}} = B(\underline{x}, kh) = \{\underline{x}' \in \Omega \mid \|\underline{x} - \underline{x}'\|_2 \leq kh\}$.
- ATTENTION : Nous allons supposer pour le reste de cette section, que $B_{\underline{x}} \subset \Omega$.
- Par Taylor et les propriétés de W, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle f(\underline{x})\rangle &= \int_{B_{\underline{x}}} \left[f(\underline{x}) + [\mathrm{Jac}\, f]_{\underline{x}} (\underline{x} - \underline{x}')\right] W(\underline{x} - \underline{x}', h)\, \mathrm{d}\underline{x}' \\ &\quad + \int_{B_{\underline{x}}} \mathcal{O}\left(\|\underline{x} - \underline{x}'\|_2^2\right) W(\underline{x} - \underline{x}', h)\, \mathrm{d}\underline{x}' \\ &= f(\underline{x}) + \mathcal{O}\left(h^2\right)\end{aligned}$$

Remarque

Ceci n'est pas toujours vrai lorsque $B_{\underline{x}} \not\subset \Omega$, car le terme contenant le jacobien ne s'annulera pas complètement.

- Notons $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(i, kh) = \{j \in \Psi \mid r_{ij} \leq kh\}$ et $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_i \setminus \{i\}$.
- $\forall i \in \Psi$, on associe une position $\underline{x}_k$, une masse m_k et une densité ρ_k,
- On discrétise sur les éléments de masse en remarquant que : $\mathrm{d}m(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}$
- On obtient f_i, la valeur discrétisée de $\langle f(\underline{x}_i)\rangle$:

$$f_i = \sum_{j \in \mathcal{B}_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij,h}$$

où $W_{ij,h} := W(\underline{x}_i - \underline{x}_j, h)$.

Forme discrète de l'approximation de lissage du gradient

- L'obtention de l'approximation du gradient se fait en substituant $\underline{\nabla} f$ dans l'approximation de lissage.
- On obtient à l'aide d'une intégration par parties et du théorème de la divergence :

$$[\underline{\nabla} f]_i = -\sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{m_j}{\rho_j} f_j \underline{\nabla}_j W_{ij,h}$$

- L'erreur de lissage reste $\mathcal{O}\left(h^2\right)$.
- Nous allons utiliser une forme plus élaborée.

- Nous allons supposer que $m_k = m$, $\eta_k = \eta$ et $\rho_k = \rho$.
- les approximations discrètes des opérateurs différentiels que nous allons utiliser sont :

$$[\underline{\nabla}\phi]_i = \sum_{j \in B_i'} \frac{m}{\rho} \left(\phi_i + \phi_j\right) \underline{x}_{ij} \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij,h}}{\partial r_{ij}}$$

$$[\underline{\nabla} \cdot \underline{u}]_i = \sum_{j \in B_i'} \frac{m}{\rho} \left(\underline{u}_i + \underline{u}_j\right) \cdot \underline{x}_{ij} \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij,h}}{\partial r_{ij}}$$

$$[\Delta \underline{u}]_i = \sum_{j \in B_i'} 2 \frac{m}{\rho} \underline{u}_{ij} \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij,h}}{\partial r_{ij}}$$

$$[\Delta \phi]_i = \sum_{j \in B_i'} 2 \frac{m}{\rho} \phi_{ij} \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij,h}}{\partial r_{ij}}$$

Université de Montréal

En substituant, nous obtenons le schéma de discrétisation PMIII temporel et spatial :

$$\left(1-\sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} a_{ij}^{n+1}\right)\underline{u}_i^* + \sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} a_{ij}^{n+1}\underline{u}_j^* = \underline{u}_i^n + \sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n,\prime}} a_{ij}^n\left(\underline{u}_i^n-\underline{u}_j^n\right) + \Delta t \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} c_{ij}^{n+1}\right)\phi_i^{n+1} - \sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} c_{ij}^{n+1}\phi_j^{n+1} = \sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} \underline{d}_{ij}^{n+1}\cdot\left(\underline{u}_i^*+\underline{u}_j^*\right)$$

$$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^* - \sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} \underline{e}_{ij}^{n+1}\left(\phi_i^{n+1}+\phi_j^{n+1}\right)$$

$$p_i^{n+\frac{1}{2}} = \mathrm{Re}\,\phi_i^{n+1} - \sum_{j\in\mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} \underline{f}_{ij}^{n+1}\cdot\left(\underline{u}_i^*+\underline{u}_j^*\right) + K$$

- Reviens à résoudre les systèmes linéaires :

$$A\underline{u}^* = \underline{a} \quad \text{et} \quad B\phi^{n+1} = b$$

- A est définie positive.
- $-B$ est semi-définie positive. On va résoudre $-B\phi^{n+1} = -b$.
  - Problème de Poisson avec conditions de Neumann, Donc $-B$ sera singulière.
  - On ajoute 1 à un élément i de la diagonale pour fixer $\phi_i = 0$.
  - On devra forcer la condition de compatibilité.
- On résout à l'aide de la méthode du gradient conjugué préconditionnée couplée à une décomposition incomplète de Cholesky.

Plusieurs problèmes sont rencontrés lorsque nous étudions une particule située à proximité de la frontière.

- Un vide de particule se crée. Ainsi, il y a une chute dans la densité :

$$\rho_i = \sum_{j \in \mathcal{B}_i} m_j W_{ij,h}$$

- Terme résiduel contenant le Jacobien dans l'erreur de lissage.
- Comment imposer les conditions aux limites ?
- Quelles conditions aux limites doit-on imposer sur $\underline{u}^*$ et ϕ^{n+1} ?

Lorsque la frontière est une droite :

Étape 1 Pour chaque particule i, on crée une particule image i' à l'extérieur du domaine de façon symétrique.

Étape 2 On impose des valeurs spécifiques aux champs des particules images pour satisfaire les conditions aux limites.

Le but est de satisfaire les conditions aux limites lorsque nous y évaluons l'approximation de lissage.

Condition de Dirichlet : Soit une condition de la forme :

$$[f(\underline{x})]_\Gamma = f_b(\underline{x})$$

Alors, on obtient par extrapolation linéaire :

$$f_{i'} = 2f_{i_b} - f_i$$

où, i_b est la projection de i sur Γ.

Condition de Neumann : Soit une condition de la forme :

$$\left[\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{n}}\right]_\Gamma = g(\underline{x})$$

Alors, on obtient par différence centrée :

$$f_{i'} = 2r_{ii_b} g_{i_b} + f_i$$

Méthode des tangentes multiples I

Lorsque la frontière est courbée et lisse :

Étape 1 Trouver les tangentes à la courbe $\underline{\tau}_k$ sur chacun des marqueurs frontières k.

Étape 2 Pour chaque voisin j de k, on crée une particule image ${j_k}'$ symétrique par rapport à $\underline{\tau}_k$.

Étape 3 On impose des valeurs spécifiques aux champs des particules images ${j_k}'$ pour satisfaire les conditions aux limites de leurs marqueurs associés k.

Étape 4 On garde, dans le voisinage d'une particule d'intérêt i, les images ${j_k}'$ dont :

i) l'image ${j_k}'$ est dans le voisinage de i ;

ii) le marqueur frontière k est dans le voisinage de i ;

iii) la particule mère j est dans le voisinage de i ;

iv) l'image ${j_k}'$ n'est pas dans l'intérieur du domaine ;

v) il existe un chemin reliant la particule d'intérêt i et la particule mère j, complètement contenue dans le support compact. Dans le cas contraire, nous rejetons aussi la particule mère j.

vi) D'autre conditions peuvent êtres appliquées.

Étape 5 Si la particule d'intérêt i possède comme voisin plusieurs particules images ${j_k}'$ issues d'une même particule mère j, nous pondérons la masse des images en divisant par ce nombre d'occurrences.

Nous allons modifier l'étape 5 de la méthode

Étape 5 Si la particule d'intérêt i possède, comme voisin, plusieurs particules images ${j_k}'$ issues d'une même particule mère j, on pose $m_{{j_k}'} = \alpha_{{j_k}'} m_j$, où :

$$\alpha_{{j_k}'} = \frac{W\left(i{j_k}', h\right)}{\sum_{l} W\left(i{j_l}', h\right)}$$

- De cette façon, l'impact qu'une particule image ${j_k}'$ à sur la particule i dépend, de manière consistante et continue, de la position relative de la particule image ${j_k}'$ par rapport à la position de i.

Frontière non-lisse et conditions aux limites discontinues

Soit $\underline{x}_k \in \Gamma = \Gamma_- \bigcup \{\underline{x}_k\} \bigcup \Gamma_+$ un point singulier ou de discontinuité des conditions aux limites, séparant la frontière en deux parties.

- **Étape 1** On trouve les prolongements tangentiels $\underline{\tau}_{k_\pm}$ des courbes $\Gamma_\pm$ en k, à l'aide de différences arrière et avant. On définit la tangente moyenne $\underline{\tau}_k$, en se point.
- **Étape 2** On duplique le marqueur. On obtient k_- associé à Γ_- et k_+ associé à Γ_+.
- **Étape 3** On impose sur $k_\pm$ les conditions aux limites de $\Gamma_\pm$, respectivement.
- **Étape 4** Toutes particules images issues des marqueurs $k_\pm$ verront leurs contributions coupées de moitié, c'est-à-dire que nous diviserons leurs masses de moitié.
- **Étape 5** On applique ensuite la méthode des tangentes multiples pondérées, en utilisant $\underline{\tau}_k$.

Obstacle rigide : Conditions de non-pénétration et de non-dérapage.

- Définit par $\underline{u}^{n+1} = \underline{0}$.
- On pose $\frac{\partial}{\partial \underline{n}}\phi^{n+1} = 0$.
- Alors,

$$\underline{u}^* \cdot \underline{n} = 0$$
$$\underline{u}^* \cdot \underline{t} = \Delta t \underline{\nabla} \tilde{\phi}^{n+1} \cdot \underline{t}$$

- Ici, $\tilde{\phi}^{n+1}$ est une approximation de ϕ^{n+1}.
- Par exemple, $\tilde{\phi}^{n+1} = \phi^n$.

Symétrique : Conditions de non-pénétration de force de cisaillement nulle.

- Définit par $\underline{u}^{n+1} \cdot \underline{n} = 0$ et $\underline{t} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} \cdot \underline{n} = 0$.
- On suppose que la ligne de symétrie est en $x = 0$. La seconde condition devient $\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left[\underline{u}^{n+1} \cdot \underline{t} \right] = 0$.
- On pose $\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \phi^{n+1} = 0$.
- Alors,

$$\underline{u}^* \cdot \underline{n} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} \left[\underline{u}^* \cdot \underline{t} \right] = 0$$

Surface libre : Conditions cinématique et dynamique :

- Définit par $\underline{U}^{n+1} \cdot \underline{n} = \underline{u}^{n+1} \cdot \underline{n}$ et $\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] \cdot \underline{n} = \tau\kappa\underline{n}$. où $\underline{U}$ est la vitesse des marqueurs frontières, $\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] = \underline{\underline{\sigma}}_f - \underline{\underline{\sigma}}_g$ est le saut de stresse sur l'interface, $\underline{\underline{\sigma}}_g$ est le tenseur de Cauchy du gaz et $\underline{\underline{\sigma}}_f$ celui du fluide, τ est la tension de surface et κ la courbure.
- On suppose que $\tau = 0$ et la pression du gaz $p_g = 0$. Ainsi, $\underline{\underline{\sigma}}_f \cdot \underline{n} = \mathbf{0}$.
- Approximation non-visqueuse : sur une frontière libre, on suppose que les termes visqueux deviennent négligeables.
- On déduit que $p^{n+\frac{1}{2}} = 0$.
- En substituant dans le schéma PMIII, nous obtenons :

$$\phi^{n+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^*$$

- Pour calculer $\underline{u}^*$ près de la frontière, nous allons normaliser W_{ij}, en le divisant par $\sum \frac{m}{\rho} W_{ij}$.

- Suite d'approximations successives $\left\{\underline{x}^{n,[k]}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\underline{x}^{n+1}$, tel que :

$$\begin{cases} \underline{x}^{n,[0]} = \underline{x}^{n} + \Delta t \underline{u}^{n} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}^{n,[k]} = \underline{x}^{n+1} \end{cases} \tag{2}$$

- Résoudre, par la méthode de Broyden, les systèmes d'équations non-linéaires :

$$\underline{0} = \underline{g}_i^{n,[k]}(\underline{z}) = \underline{z} - \underline{x}_i^{n} - \frac{\Delta t}{2}\left[\underline{u}_i^{n} + \underline{u}^{n+1,[k]}(\underline{z})\right]$$

où

$$\underline{u}^{n+1,[k]}(\underline{z}) = \sum_{j\in\mathcal{B}_{\underline{z}}^{n+1,[k]}} \frac{m}{\rho}\underline{u}_j^{n+1,[k]} W\left(\underline{z} - \underline{x}_j^{n}, h\right)$$

Écoulement de Poiseuille

- C'est un écoulement causé par un gradient de pression constant situé entre 2 plaques infinies et parallèles fixées, séparées d'une longueur H.
- Soit le domaine $\Omega = \left\{ \underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{H}{2} < y < \frac{H}{2} \right\}$ et la frontière $\Gamma = \left\{ (x, -\frac{H}{2}) \in \mathbb{R}^2 \right\} \bigcup \left\{ (x, \frac{H}{2}) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- Condition initiale :
$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = 0$$
- Conditions aux limites :
$$\underline{u}(\Gamma, t) = 0$$
- On suppose que $\underline{u} = (u(y, t), 0)$.

- Soit $\underline{f} = (f, 0)$ la force par unité de masse générant cet écoulement.
- La vitesse maximale de l'écoulement sera $U = \frac{fH^2}{8\nu}$ avec $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, le coefficient de viscosité dynamique.
- On adimensionne avec U et H. Ainsi, la solution analytique adimensionnée est :

$$
\begin{aligned}
u(y,t) = {} & -4\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) \\
& - \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\left[\pi(2n+1)\left(y+\frac{1}{2}\right)\right] \\
& \cdot \exp\left[-\frac{\pi^2}{\mathrm{Re}}(2n+1)^2 t\right]
\end{aligned}
$$

où, maintenant, $f = \frac{8}{\mathrm{Re}}$.

- Pour économiser sur le calcul, nous allons profiter de la symétrie du problème.
- Domaine de résolution :
  $\Omega = \left\{ \underset{\sim}{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -H \leq x < 0,\ 0 < y < \frac{H}{2} \right\}$
- Les conditions aux limites sont donc :

$$\Gamma_m = \left\{ (x, \frac{H}{2}) \,\middle|\, -H \leq x < 0 \right\} \qquad \longrightarrow \text{Obstacle rigide}$$

$$\Gamma_s = \{ (x, 0) \,|\, -H \leq x < 0 \} \qquad \longrightarrow \text{Symétrique}$$

$$\Gamma_i = \left\{ (-H, y) \,\middle|\, 0 < y < \frac{H}{2} \right\} \qquad \longrightarrow \text{Périodique}$$

$$\Gamma_o = \left\{ (0, y) \,\middle|\, 0 < y < \frac{H}{2} \right\} \qquad \longrightarrow \text{Périodique}$$

- Répartition initiale des particules sur une grille régulière :

$$\left\{(x_i, y_j) \,\middle|\, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq \frac{N}{2}\right\}$$

où

$$(x_i, y_j) = \left(\left[i - \frac{1}{2}\right] \mathrm{dx} - 1, \left[j - \frac{1}{2}\right] \mathrm{dy}\right)$$

- N^2 est le nombre de particules dans le domaine complet.
- $\mathrm{dx} = \mathrm{dy} = \frac{H}{N}$ sont les distances horizontales et verticales initiales interparticulaires.
- Paramètres physiques : $\rho = 10^3$, $\eta = 10^{-3}$, $H = 10^{-3}$ et $U = 1.25 \times 10^{-5}$.
- Temps final adimensionné $T = 1.25 \times 10^{-2}$.
- Pas de temps adimensionné $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$.

Écoulement de Poiseuille

- Supposons que le problème est unidimensionnel et que les particules sont distribuées uniformément.
- Supposons aussi que $\frac{h}{\Delta x} \in \left\{ \frac{2n+1}{4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- Alors, l'erreur total est donnée par :

$$E_t = E_I + E_d = f_i' - \sum_{j \in \mathcal{B}_i'} \Delta x f_j W_j'$$

$$\approx -Ah^2 + \mathcal{O}(h^4) + B\left(\frac{h}{\Delta x}\right)^{-4}\left[C + \mathcal{O}(h^2)\right] + \mathcal{O}\left(\left[\frac{h}{\Delta x}\right]^{-6}\right)$$

Remarque

Ceci n'est pas exactement vrai pour la fonction spline cubique. En effet, ce résultat est exact seulement pour des $W \in C^\infty$ sur l'intérieur de leurs supports compacts de rayon $2h$ et de régularité $\beta = 2$ sur les frontières.

- L'erreur dépend simultanément de h et du ratio $\frac{h}{\Delta x}$.
- Lorsque $\left(\frac{h}{\Delta x}\right)^{-1} \to 0$, l'erreur de lissage dominera avec h^2.
- Lorsque $h \to 0$ et que Δx est fixé, l'erreur de discrétisation domine avec $\left(\frac{h}{\Delta x}\right)^{-4}$
- Ce n'est pas suffisant d'avoir $h \to 0$, nous devons aussi veiller à ce que $\frac{h}{\Delta x}$ reste suffisamment gros par rapport à h.

Université de Montréal

Nous avons supposé une relation de proportionnalité $\frac{h}{\Delta x} = k$

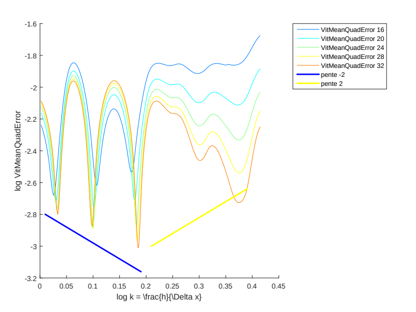


FIGURE: Erreurs en fonction de k pour différents Δx fixés

Il s'agit de l'erreur moyenne quadratique.

- Lorsque h est trop petit, nous perdons la convergence d'ordre 2.
- L'erreur de discrétisation se comporte comme $\left(\frac{h}{\Delta x}\right)^{-2}$.
  Les particules se déplacent !
- L'erreur ne se comporte pas de façon monotone.
  L'analyse est exacte que pour certains k
- Nous pouvons facilement observer que le comportement local de l'erreur, là où l'erreur de discrétisation domine, change sur une période Δk correspondant à l'ajout d'un aire Δx de chaque côté du support compact.
  Chevauchement des éléments de masses sur le support
- En fait, ceci n'est pas exactement vrai. En effet, il y a un léger décalage entre les k associés à ces minimums locaux et ceux que nous observons.
  Deux dimensions
- Il existe un minimum global de l'erreur en $k \approx 1.52$.

Ordre de convergence

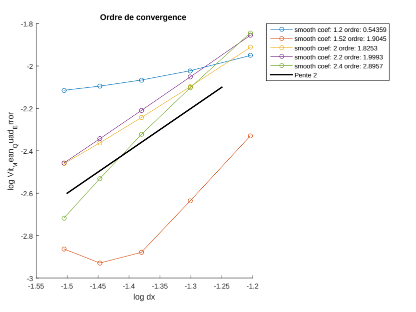


FIGURE: Ordre de convergence en fonction de Δx pour différentes valeurs de k

Comme nous pouvons le voir, en choisissant raisonnablement k, nous obtenons l'ordre de convergence désiré $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Dans ce travail nous avons :

- Obtenu une meilleur compréhension du comportement global de l'erreur.
- Développé une méthode sans maillage et lagrangienne d'ordres $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ et $\mathcal{O}\left(\left[\frac{h}{\Delta x}\right]^{-4}\right)$.
- Trouvé une approximation des conditions aux limites sur une surface libre.
- Perfectionné un algorithme pour bien gérer les surfaces libres, frontières non-lisses et conditions aux limites discontinues. (Bientot finit !)

B. Ataie-Ashtiani, G. Shobeyri et L. Farhadi. *Modified incompressible SPH method for simulating free surface problems*. Fluid Dyn. Research, **40** : 637–661, 2008.

M. Benoune, J. Morin-Drouin et R.G. Owens. On the condition for the immersed interface method.

F. Bierbrauer, P.C. Bollada et T.N. Phillips. *A consistent reflected image particle approach to the treatment of boundary conditions in smoothed particle hydrodynamics*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **198** : 745–762, 2009.

D.L. Brown, R. Cortez et M.L. Minion. *Accurate projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations*. J. Comp. Phys., **168** : 464–499, 2001.

A.J. Chorin. *Numerical Solution of the Navier Stokes Equations*. Math. Computation, **22** : 3400–34102, 1968.

Université de Montréal

A.J. Chorin et J.E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, third edition, 1992.

S. Claus. PhD thesis.

T. El-Gammal, E.E. Khalil, H. Haridy et E. Abo-Serie. *Influence of smoothing length and virtual particles on SPH Accuracy*. Int. J. Mat. Mech. Manu., **1** : 166–170, 2013.

S. J. Cummins et M. Rudman. *An SPH projection method*. J. Comp. Phys., **152** : 584–607, 1999.

J. Kim et P. Moin. *Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations*. J. Comp. Phys., **59** : 308–323, 1985.

A. Limache et S. Idelsohn. *Laplace form of navier-stokes equations : A safe path or a wrong way ?* Mecánica Computaciona, **XXV** : 151 – 168, 2006.

M.B. liu et G.R. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) : an Overview and Recent Developments*. Arch. Comp. Meth., **17** : 25–76, 2010.

J.J. Monaghan. *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Rep. Prog. Phys., **68** : 1703–1759, 2005.

R.G.K. Noutcheuwa. *Une nouvelle méthode smoothed particle hydrodynamics : simulation des interfaces immergées et de la dynamique Brownienne des molécules avec des interactions hydrodynamiques*. PhD thesis, Université de Montréal, 2012.

R.G.K. Noutcheuwa et R.G. Owens. *A new incompressible smoothed particle hydrodynamics-immersed boundary method*. Int. J. Num. Analysis. Model., **3** : 126–167, 2012.

N.J. Quinlan, M. Basa et M. Lastiwka. *Truncation error in mesh-free particle methods*. Int. J. Num. Meth. Engrg., **66** : 2064–2085, 2006.

Université de Montréal

S.H. Sadek. Modeling die swell of second-order fluids using sph. Master's thesis, Sabanci University, 2010.

S.M. Shadloo, A. Zainali, S.H.. Sadek et M. Yildiz. *Improved Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics method for simulating flow around bluff bodies*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **200** : 1008–1020, 2011.

S. Shao et Edmond Y.M. Lo. *Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface*. Adv. Water. Resc., **26** : 787–800, 2003.

S. Viau, P. Bastien et S-H. Cha. *An implicit method for radiative transfert with diffusion approximation in smooth particle hydrodynamics*. Astrophys. J., **639** : 559–570, 2006.

M. Yildiz, R.A. Rook et A. Suleman. *SPH with the multiple boundary tangent method*. Int. J. Num. Meth. Engrg., **77** : 1416–1438, 2008.