

**Université de Montréal**

**Méthode SPH implicite d'ordre 2 appliquée à des fluides incompressibles munis d'une frontière libre**

par

**Damien Rioux Lavoie**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

1 mai 2017



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Méthode SPH implicite d'ordre 2 appliquée à des fluides incompressibles munis d'une frontière libre**

présenté par

**Damien Rioux Lavoie**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Anne Bourlioux*

---

(président-rapporteur)

*Robert G. Owens*

---

(directeur de recherche)

*Jean-Christophe Nave*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le

*20 juin 2017*

---



# SOMMAIRE

---

L'objectif de ce mémoire est d'introduire une nouvelle méthode *smoothed particle hydrodynamics* (SPH) implicite purement lagrangienne, pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles en présence d'une surface libre. Notre schéma de discrétisation est basé sur celui de Kéou Noutcheuwa et Owens [19]. Nous avons traité la surface libre en combinant la méthode *multiple boundary tangent* (MBT) de Yildiz *et al.* [43] et les conditions aux limites sur les champs auxiliaires de Yang et Prosperetti [42]. Ce faisant, nous obtenons un schéma de discrétisation d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  et  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ , selon certaines contraintes sur la longueur de lissage  $h$ . Dans un premier temps, nous avons testé notre schéma avec un écoulement de Poiseuille bidimensionnel à l'aide duquel nous analysons l'erreur de discrétisation de la méthode SPH. Ensuite, nous avons tenté de simuler un problème d'extrusion newtonien bidimensionnel. Malheureusement, bien que le comportement de la surface libre soit satisfaisant, nous avons rencontré des problèmes numériques sur la singularité à la sortie du moule.

**Mots clés :** smoothed particle hydrodynamics (SPH), écoulement incompressible, méthode de projection, théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge, méthode lagrangienne, surface libre, multiple boundary tangent (MBT), problème d'extrusion newtonien.



# SUMMARY

---

The objective of this thesis is to introduce a new implicit purely lagrangian *smoothed particle hydrodynamics* (SPH) method, for the resolution of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations in the presence of a free surface. Our discretization scheme is based on that of Kéou Noutcheuwa et Owens [19]. We have treated the free surface by combining Yildiz *et al.* [43] *multiple boundary tangent* (MBT) method and boundary conditions on the auxiliary fields of Yang et Prosperetti [42]. In this way, we obtain a discretization scheme of order  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  and  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ , according to certain constraints on the smoothing length  $h$ . First, we tested our scheme with a two-dimensional Poiseuille flow by means of which we analyze the discretization error of the SPH method. Then, we tried to simulate a two-dimensional Newtonian extrusion problem. Unfortunately, although the behavior of the free surface is satisfactory, we have encountered numerical problems on the singularity at the output of the die.

**Keywords :** smoothed particle hydrodynamics (SPH), incompressible flow, projection method, Helmholtz-Hodge decomposition theorem, lagrangian method, free surface, multiple boundary tangent (MBT), newtonian extrusion problem.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xiii
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
Origine et motivations.....	3
Objectif et organisation du mémoire.....	4
<b>Chapitre 1. Les équations de Navier-Stokes</b> .....	7
1.1. Dérivation des équations de Navier-Stokes .....	7
1.1.1. Points de vue Eulérien et Lagrangien .....	7
1.1.2. Équation de continuité.....	10
1.1.3. Équation de la quantité de mouvement .....	11
1.1.4. Équation constitutive - Fluide newtonien .....	13
1.1.5. Équations de Navier-Stokes.....	13
1.1.5.1. Forme de la divergence .....	14
1.1.5.2. Forme de Laplace.....	14
1.2. Discrétisation temporelle .....	14
1.2.1. Schéma PMIII.....	17
1.3. Adimensionnalisation .....	18
1.3.1. Variables adimensionnées .....	18
1.3.2. Forme de Laplace adimensionnée des équations de Navier-Stokes.....	19
1.3.3. Schéma PMIII adimensionné.....	19
<b>Chapitre 2. Smoothed Particle Hydrodynamics</b> .....	21
2.1. Smoothed-Particle-Hydrodynamics.....	21

2.1.1.	Fonction de lissage .....	22
2.1.2.	Erreur de lissage.....	24
2.1.3.	Discrétisation de l'approximation de lissage.....	26
2.1.4.	Approximation des opérateurs différentiels.....	27
2.1.4.1.	Discrétisation de la dérivée première spatiale.....	27
2.1.4.2.	Forme discrète de la dérivée seconde spatiale.....	28
2.1.5.	Opérateurs utilisés.....	29
2.2.	Discrétisation spatiale du schéma PMIII .....	29
2.2.1.	Discrétisation spatiale .....	30
2.2.2.	Systèmes d'équations linéaires .....	31
2.2.2.1.	Résolution du système pour la vitesse auxiliaire.....	32
2.2.2.2.	Résolution du système pour la pression auxiliaire .....	33
2.2.3.	Schéma de discrétisation symétrique PMIII .....	35
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Traitement des frontières .....</b>	<b>37</b>
3.1.	Notations.....	37
3.2.	Frontière physique.....	38
3.2.1.	Méthode des particules imaginaires (IP) .....	38
3.2.2.	Méthode des tangentes multiples à la frontière (MBT) .....	39
3.2.3.	Méthode des tangentes multiples à la frontière lissée (SMBT) .....	44
3.3.	Frontière artificielle.....	45
3.3.1.	Frontières Périodiques .....	45
3.3.2.	Frontière d'entrée.....	46
3.3.3.	Frontière symétrique.....	47
3.3.4.	Combinaison de frontières physiques et artificielles .....	47
3.4.	Conditions aux limites.....	48
3.4.1.	Condition de Dirichlet .....	49
3.4.2.	Condition de Neumann .....	49
3.4.3.	$\Gamma_M$ : Paroi solide .....	50
3.4.4.	$\Gamma_F$ : Surface Libre .....	51
3.4.4.1.	Conditions pour le champ de vitesse .....	52
3.4.4.2.	Conditions pour les champs auxiliaires.....	55
3.4.5.	$\Gamma_s$ : Ligne de symétrie .....	57

3.5. Évolution de la frontière et du domaine - Méthode de Broyden .....	59
<b>Chapitre 4. Validation numérique</b> .....	<b>63</b>
4.1. Écoulement de Poiseuille bidimensionnel .....	63
4.1.1. Solution analytique du problème de Poiseuille .....	64
4.1.1.1. Solution stationnaire .....	64
4.1.1.2. Solution transitoire .....	65
4.1.2. Résolution numérique du problème de Poiseuille .....	66
4.1.3. Analyse de l'erreur et résultats .....	68
4.1.3.1. Erreur de discrétisation .....	68
4.1.3.2. Résultats .....	70
4.2. Problème d'extrusion .....	76
4.2.1. Résolution numérique du problème d'extrusion .....	79
4.2.2. Résultats, conclusions et solutions potentielles .....	81
<b>Conclusion</b> .....	<b>89</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>91</b>



# LISTE DES FIGURES

---

1.1	Évolution du domaine géométrique .....	9
2.1	Support compact de la fonction de lissage.....	24
2.2	Fonction spline cubique et sa dérivée .....	25
3.1	Méthode des particules imaginaires .....	39
3.2	Étape 1 : Droites tangentes des marqueurs frontières.....	40
3.3	Étape 2 : Recherche des marqueurs frontières voisins. Ici, $\mathcal{B}_{i,\Psi} = \{a, b\}$ , $\mathcal{B}_{j,\Psi} = \{b, c\}$ et $\mathcal{B}_{k,\Psi} = \{c, d\}$ .....	41
3.4	Étape 3 : Création des particules imaginaires. Ici, les particules imaginaires associées à la particule $i$ et aux marqueurs $a$ et $b$ sont, respectivement, $i'_a$ et $i'_b$	42
3.5	Étape 4 : Recherche du voisinage imaginaire d'une particule d'intérêt. Ici, $\mathcal{B}_{p,\mathcal{I}} = \{j'_b, k'_c, k'_d\}$ .....	43
3.6	Étape 5 : Recherche de particules imaginaires jumelles dans le voisinage d'une particule d'intérêt. Ici, $k'_c$ et $k'_d$ sont jumelles par rapport à $p$ . Ainsi, $\#_p k'_c = \#_p k'_d = 2$ et $\#_p j'_b = 1$ .....	44
3.7	Frontières périodiques .....	46
3.8	Frontière d'entrée.....	47
3.9	Frontière symétrique.....	47
3.10	Combinaison de frontières artificielles et physiques .....	48
3.11	Changement de coordonnées.....	52
3.12	Image symétrique d'une particule $i$ .....	57
4.1	Exemple de $h$ recherché .....	69
4.2	Profil de Poiseuille transitoire pour différents pas de temps. Ici, $k = 1.75$ et $\Delta x = \frac{1}{32}$ .....	71
4.3	Comportement de l'erreur dans la solution transitoire de l'écoulement de Poiseuille pour $k = 1.75$ et $\Delta x = \frac{1}{32}$ .....	72

4.4	Erreur en fonction de $k$ pour différents $\Delta x$ fixé .....	73
4.5	Ordre de convergence spatial en fonction de $k$ .....	74
4.6	Ordre de convergence en fonction de $\Delta x$ pour différentes valeurs de $k$ .....	75
4.7	Géométrie du problème d'extrusion .....	76
4.8	Taux de gonflement en fonction du coefficient de glissement pour $Re = 0$ . Figure provenant de Mitsoulis <i>et al.</i> [28] .....	77
4.9	Taux de gonflement en fonction du nombre de Reynolds obtenue par Mitsoulis <i>et al.</i> [28] et Claus [10] pour un problème d'extrusion planaire. Figure provenant de Claus [10] .....	78
4.10	État initial du domaine de résolution .....	79
4.11	Composante en $x$ du champ de vitesse à différents pas de temps .....	81
4.12	Composante en $y$ du champ de vitesse à différents pas de temps .....	82
4.13	Divergence du champ de vitesse à différents pas de temps .....	83
4.14	Champ de pression à différents pas de temps .....	84
4.15	Composante $xx$ du tenseur des extra-contraintes à différents pas de temps ..	85
4.16	Composante $yy$ du tenseur des extra-contraintes à différents pas de temps ..	86
4.17	Composante $xy$ du tenseur des extra-contraintes à différents pas de temps ..	87

# REMERCIEMENTS

---

Je remercie profondément mon directeur de recherche Robert G. Owens pour sa patience, sa compréhension et ses précieux conseils. Sa rigueur ainsi que sa persévérance ont été le phare de ce projet. J'espère garder cette lumière pour me guider dans mes entreprises futures, tant sur le plan académique que dans la vie en général.

Je remercie aussi ma mère, Marianne Rioux, ainsi que l'homme de sa vie, Christian Bédard. Sans leurs encouragements, leur soutien et leurs sacrifices, ce mémoire aurait été impossible à réaliser.

Je tiens aussi à remercier tous mes amis qui m'ont épaulé durant ce périple. En particulier, je tiens à remercier Christina Gagnon pour avoir enduré les sautes d'humeur provoquées par les nombreux défis rencontrés dans ma recherche.

Finalement, je remercie mes collègues et les employés du département de mathématiques de l'Université de Montréal, pour l'aide et le support qu'ils m'ont apportés.



# INTRODUCTION

---

## ORIGINE ET MOTIVATIONS

La méthode *smoothed particle hydrodynamics* (SPH), proposée en 1977 par Gingold et Monaghan [13] et simultanément par Lucy [26], est une méthode sans maillage permettant de résoudre des phénomènes dynamiques en considérant la matière comme un nuage de particules. Il s'agit de par sa construction d'une méthode lagrangienne. Ainsi, elle procure un certain nombre d'avantages pour la résolution de phénomènes dynamiques compliqués que les méthodes avec maillage avaient de la difficulté à résoudre. En effet, dans les méthodes avec maillage, par exemple celle des différences finies et celle des éléments finis, il est extrêmement difficile d'attaquer des problèmes possédant des géométries complexes, des domaines d'évolutions et des problèmes d'interfaces.

Bien que la première application de la méthode SPH était dans le domaine de l'astrophysique, les chercheurs ont rapidement pensé à la possibilité d'utiliser cette méthode afin de simuler la dynamique des fluides incompressibles. La première approche utilisée supposait que le fluide est légèrement compressible [13, 29, 31]. C'est ainsi qu'est née la méthode *weakly compressible smoothed particle hydrodynamics* (WCSPH). Cette méthode utilise une équation d'état pour relier la pression à la densité volumique du fluide à l'aide d'une vitesse du son finie, choisie judicieusement. En effet, l'utilisation d'une vitesse du son trop haute a pour effet d'imposer une condition de Courant-Friedrich-Lewy sur la stabilité très sévère et force un pas de temps très court [13]. De plus, l'équation d'état fait en sorte que les erreurs provenant des fluctuations de la densité impliquent des erreurs encore plus importantes dans le champ de pression.

Par conséquent, afin de mieux contrôler les erreurs pour le champ de pression, il est devenu nécessaire d'obtenir une nouvelle méthode SPH totalement incompressible. Inspiré par la méthode de projection de Chorin [8], Cummins et Rudman [11] sont parvenus à créer une nouvelle formulation incompressible de la méthode SPH, nommée *projection smoothed particle hydrodynamics* (PSPH). Pour ce faire, ces auteurs découplent la pression de la vitesse à l'aide de la décomposition de Helmholtz-Hodge en introduisant des champs auxiliaires. Avec cet outil, il est possible de résoudre le problème avec une vitesse auxiliaire, pas nécessairement

incompressible, puis de reconstruire le champ de vitesse original incompressible à l'aide d'une pression auxiliaire. De cette manière, Lee et LeVeque [21] ont démontré que l'utilisation de la méthode PSPH permet l'obtention de solutions plus régulières que la méthode WCSPH, et ce pour le champ de vitesse et celui de la pression.

Bien entendu, l'incompressibilité n'était pas le seul défi rencontré par la communauté scientifique dans le développement de la méthode SPH. En particulier, les chercheurs se sont butés longtemps à la problématique de l'application des conditions aux limites. En effet, les conditions aux limites habituelles sont appliquées au champ de vitesse et celui de pression. Par contre, la méthode PSPH demande des conditions aux limites pour les champs auxiliaires provenant de la décomposition. À ce jour, la question pour les conditions aux limites sur une paroi solide a été résolue par Brown *et al.* [7] et Kim et Moin [17]. En effet, ils ont trouvé des conditions aux limites à imposer sur une paroi qui minimise l'apparition d'une couche limite près de la frontière et qui est suffisante pour obtenir une convergence d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ . Par contre, il n'existe pas encore à ce jour de méthode pour appliquer directement les conditions aux limites de surface libre dans la méthode SPH. Jusqu'à maintenant, le problème a été contourné en conservant le vide de particule en dehors du domaine pour le champ de vitesse et en utilisant une approximation de non-viscosité pour l'évaluation du champ de pression [35]. Une autre approche était d'utiliser des forces artificielles de Lennard-Jones entre les particules [30].

Un second problème rencontré près des frontières est dû au vide de particule en dehors du domaine. L'approche la plus couramment utilisée pour résoudre ce problème est celle des particules images (IP) proposée par Morris *et al.* [32] puis reprise par Cummins et Rudman [11] et Bierbrauer *et al.* [6]. Cette méthode crée des particules en dehors du domaine miroitant les particules à l'intérieur du domaine, afin d'y combler le vide de particule. De plus, cette méthode nous permet d'imposer des valeurs aux champs des particules images permettant d'appliquer facilement les conditions aux limites. Bien entendu, cette méthode possède des limitations, par exemple le long de frontières courbées. Par contre, Yildiz *et al.* [43] ont récemment créé une extension de cette méthode, nommée *multiple boundary tangent* (MBT). Il s'agit d'une application successive de la méthode des particules images le long de droites tangentes à la frontière courbée.

Pour plus d'informations sur l'histoire accompagnant le développement de la méthode SPH, nous encourageons le lecteur à consulter les ouvrages [22, 24, 41].

## OBJECTIF ET ORGANISATION DU MÉMOIRE

Le but de ce travail est de construire sur ce qui a déjà été fait par Kéou Noutcheuwa [18] et Sadek [35] afin d'introduire une nouvelle approche pour le traitement des surfaces libres. Contrairement à ce que l'on retrouve dans la littérature, notre approche applique directement les conditions aux limites sur la surface libre. En effet, nous sommes parvenus

à trouver des conditions à imposer sur le champ de vitesse, le champ de pression et les champs auxiliaires provenant de l'étape de projection, et ce, sans les suppositions décrites précédemment. Cette méthode s'intègre particulièrement bien à l'approche itérative que nous utilisons pour résoudre le schéma implicite. De plus, nous argumentons que ces conditions aux limites conservent potentiellement la convergence temporelle d'ordre 2 [42]. À notre connaissance, cette approche n'a jamais été utilisée avec la méthodologie SPH. Ainsi, il s'agit d'une nouvelle contribution à ce champ de recherche. La présentation de ce mémoires est organisée de la manière suivante :

Dans le chapitre 1, nous allons obtenir les équations de Navier-Stokes d'un fluide newtonien incompressible. Ensuite, nous allons obtenir notre schéma de projection temporel implicite, appelé PMIII [7, 17, 18], en utilisant une méthode de projection [8, 11, 27] et une approche lagrangienne.

Dans le chapitre 2, nous décrirons de manière détaillée la discrétisation SPH de la méthode de projection PmIII [24, 35]. Par la suite, nous appliquerons cette méthode pour obtenir une discrétisation spatiale du schéma PMIII. De plus, nous allons discuter de la résolution numérique du système d'équations linéaires obtenue à l'aide de cette discrétisation [11, 18].

Le chapitre 3 portera sur l'implémentation des frontières ainsi que des conditions aux limites. Ainsi, nous allons discuter de différentes façons d'introduire des particules imaginaires en dehors du domaine, afin d'y combler le vide de particule, adaptées à la géométrie de la frontière [32, 43]. Ensuite, nous allons discuter des valeurs attribuées aux champs de ces particules imaginaires afin de satisfaire les conditions aux limites [7, 42] de nos frontières. En particulier, nous apportons une nouvelle méthode afin d'appliquer les conditions de surface libre. De plus, nous discutons de la méthode itérative que nous allons utiliser pour obtenir des approximations successives de la configuration du domaine dans le temps [4], chose qui est nécessaire dans notre schéma implicite.

Finalement, nous présenterons dans le chapitre 4 deux applications de notre schéma de discrétisation numérique. Le premier sera un écoulement de Poiseuille [6, 18, 32]. Nous allons nous servir de ce problème de référence afin d'analyser l'erreur inhérente à notre schéma de discrétisation. La seconde application sera un problème d'extrusion provoqué par un écoulement de Poiseuille [10, 28, 35]. Cet écoulement nous offre la possibilité de tester notre méthode sur un domaine d'évolution muni d'une surface libre. Malheureusement, nos résultats ont été pollués par une singularité située sur l'intersection entre la paroi solide du canal et la surface libre. Par contre, bien que nous n'avons pas réussi à résoudre le problème sur cet intersection, la surface libre se comporte qualitativement tel qu'attendu lorsque nous sommes suffisamment loin de la paroi. Notons qu'à notre connaissance, la méthode SPH n'a été appliquée qu'une seule fois à la résolution du problème d'extrusion par Sadek [35]. Par contre, la méthode utilisée par Sadek pour résoudre le problème newtonien est WCSPH, bien qu'une méthode incompressible soit utilisée pour résoudre le problème non-newtonien.



# Chapitre 1

---

## LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Tout au long de ce mémoire, nous allons nous concentrer sur des écoulements planaires. Aussi, nous allons supposer le fluide comme étant incompressible, visqueux, newtonien et homogène. De plus, nous allons supposer que le fluide possède une viscosité constante et ignorer les effets thermiques.

### 1.1. DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Dans cette section, nous allons dériver les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible et newtonien. Pour plus d'information, le lecteur pourrait se référer aux ouvrages [1, 20] ainsi qu'aux thèses [10, 18].

#### 1.1.1. Points de vue Eulérien et Lagrangien

Nous allons considérer un écoulement planaire dans un intervalle de temps fixé  $[-T, T]$ . Fixons le temps initiale  $t = 0$  et considérons un intervalle de temps  $I = [-\epsilon, \epsilon] \subset [-T, T]$ , où  $\epsilon > 0$  est suffisamment petit pour que les quantités introduites plus bas soient bien définies  $\forall t \in I$ .

Nous allons noter par  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  le **domaine géométrique** occupé par le fluide au temps initiale  $t = 0$  et sa **frontière géométrique**  $\Gamma_0 = \bar{\Omega}_0 \setminus \Omega_0$ . Nous allons supposer que  $\Gamma_0$  est lipschitzienne, c'est-à-dire, suffisamment lisse.

Soit  $i$  l'étiquette d'une particule matérielle. Nous allons noter par  $\Phi$  l'ensemble des étiquettes de nos particules matérielles. Nous allons appeler  $\Phi$  le **domaine matériel**, ou encore, le **domaine particulaire**. Par **particule matérielle**, nous sous-entendons une particule fondamentale constituant le fluide et, par étiquette, nous voulons dire un indice indépendant du temps étant associé à une particule matérielle. Remarquons que plus loin dans ce travail, nous allons préférer voir les particules matérielles non pas comme des particules dans le sens physique du terme, mais plutôt comme des éléments infinitésimaux du fluide.

Notons qu'il existe une bijection entre les domaines géométrique et matériel dans la limite où nous supposons que le fluide est un continuum. C'est ce que nous ferons pour le

moment. En effet, la fonction  $p: \Phi \rightarrow \Omega_0$ , associant l'étiquette d'une particule à sa position initiale, est une bijection entre les deux domaines. Aussi, nous allons supposer que  $\Phi$  ne varie pas dans le temps, et donc, que le fluide reste constitué des mêmes particules en tout temps. Par conséquent, nous pourrions généraliser la fonction  $p_t: \Phi \rightarrow \Omega(t)$  comme étant une bijection entre les étiquettes des particules et leurs positions aux temps  $t \in I$ . Ici,  $\Omega(t)$  correspond à la configuration spatiale du domaine géométrique au temps  $t$  que nous définirons plus loin dans cette section. Ceci nous permettras de passer du domaine matériel aux domaines géométriques, et vice versa, sans alourdir la notation inutilement. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{p} & \Omega_0 \\ & \searrow p_t & \downarrow S_t \\ & & \Omega_t \end{array}$$

Supposons qu'une particule  $i \in \Phi$ , partant de la position initiale  $\underline{\xi}_i \in \Omega_0$ , suit une courbe  $\underline{x}_i: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  nommée trajectoire. Aussi, supposons que le **champ de vitesse** de l'écoulement est donné par le champ vectoriel  $\underline{u}: \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Sous certaines contraintes sur la continuité de  $\underline{u}$ , le théorème de Picard–Lindelöf implique que les **trajectoires** sont solutions du système d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1 suivant :

$$\frac{d}{dt} \underline{x}_i(t) = \underline{u}(\underline{x}_i(t), t) \quad t \in I \quad (1.1.1a)$$

$$\underline{x}_i(t_0) = \underline{\xi}_i \quad (1.1.1b)$$

De plus, ces trajectoires sont uniques. Ceci nous amènes à définir la famille d'application  $\{S(t)\}_{t \in I}$ , nommée le **flot**, par :

$$\begin{aligned} S(t) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \underline{\xi}_i &\mapsto S(t)\underline{\xi}_i = \underline{x}_i(t) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Notons que le flot est un difféomorphisme et satisfait la propriété de semi-groupe :

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s) \quad \forall s, t, t+s \in I \quad (1.1.3a)$$

$$S(0) = \text{Id} \quad (1.1.3b)$$

avec, en particulier,  $(S(t))^{-1} = S(-t)$ .

Nous pouvons maintenant définir les nouveaux **domaines géométriques**, correspondant à l'évolution du domaine  $\Omega_0$  dans le temps, suivants :

$$\Omega(t) = S(t)\Omega_0 = \left\{ S(t)\underline{\xi}_i \mid \underline{\xi}_i \in \Omega_0 \right\} \quad t \in I \quad (1.1.4a)$$

$$\Omega(0) = \Omega_0 \quad (1.1.4b)$$

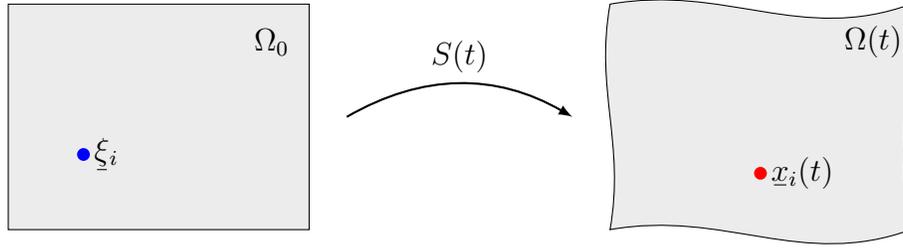


FIGURE 1.1. Évolution du domaine géométrique

Puisque  $S(t)$  est une application linéaire et continue, nous aurons, lorsque  $\Omega_0$  sera ouvert et borné, que  $\Omega(t)$  restera lui aussi ouvert et borné  $\forall t \in I$ . De manière similaire, nous définissons les **frontières géométriques** :

$$\Gamma(t) = S(t)\Gamma_0 \quad t \in I \quad (1.1.5a)$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_0 \quad (1.1.5b)$$

Ainsi, nous avons deux approches différentes pour décrire l'écoulement, l'une dite eulérienne et l'autre lagrangienne :

**Eulérien,  $(\underline{x}, t)$ :** On étudie un point arbitraire  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$  et considérons le champ de vitesse  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  en ce point. On étudie donc les domaines géométriques.

**Lagrangien,  $(i, t)$ :** On étudie une particule  $i \in \Phi$  de coordonnée initiale  $\xi_i \in \Omega_0$  et considérons sa trajectoire  $\underline{x}_i(t) = S(t)\xi_i$ . On étudie donc le domaine matériel.

Comme nous pouvons le remarquer, le point de vue eulérien nous limite rapidement lorsque le domaine géométrique se transforme au fil du temps. Par contre, le point de vue lagrangien est parfaitement adapté à cette situation puisqu'il se concentre uniquement sur le domaine matériel. Le formalisme de la méthode *smoothed-particles-hydrodynamics* utilisée dans ce mémoire est centré sur le point de vue lagrangien. En effet, nous allons considérer le fluide comme étant un ensemble de particules, puis les faire évoluer dans le temps via leurs interactions ainsi que des forces externes.

Le point de vue lagrangien nous amène à définir un concept de taux de variation d'une quantité physique d'intérêt le long d'une trajectoire. Par exemple, nous pourrions nous intéresser au changement de vitesse, ou encore de température, d'une particule au fil du temps le long de sa trajectoire. Soit  $i$  une particule et  $\underline{x}_i(t)$  sa trajectoire. Supposons que  $\underline{x}_i$  correspond à la valuation de  $\underline{x}_i(t)$  au temps  $t$ , c'est-à-dire, la position de la particule à ce moment dans

$\Omega(t)$ . Nous définissons la **dérivée matérielle** d'une fonction  $f(\underline{x}, t)$ , différentiable spatialement et temporellement, comme étant :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} f(\underline{x}_i, t) &:= \frac{d}{dt} f(\underline{x}_i(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f(\underline{x}_i, t) + \underline{u}(\underline{x}_i, t) \cdot \underline{\nabla} f(\underline{x}_i, t) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Ici,  $f$  peut être une fonction scalaire, vectorielle, où même tensorielle.

Finalement, dans le reste de ce travail, nous allons employer la notation  $\Omega \times I = \bigcup_{t \in I} \Omega(t) \times \{t\}$  et nous négligerons souvent l'écriture des variables indépendantes des fonctions sauf lorsque nécessaire pour la compréhension. Aussi, nous allons parfois alterner entre  $\Omega$  et  $\Phi$  étant donné qu'il existe une bijection en ces deux types de domaines.

### 1.1.2. Équation de continuité

Soit  $\rho: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$  la **densité** du fluide. Définissons  $\Phi_{V_0} \in \Phi$  un sous-ensemble de particules fixés de position initiale  $V_0 = \{\underline{\xi}_i \mid i \in \Phi_{V_0}\} \in \Omega_0$ . On appelle  $\Phi_{V_0}$  un **volume matériel**. Nous définissons la trajectoire de  $\Phi_{V_0}$ , de la même façon que celle de  $\Omega_0$ , par :

$$V(t) = S(t)V_0 = \{S(t)\underline{\xi}_i \mid \underline{\xi}_i \in V_0\} \quad t \in I \quad (1.1.7a)$$

$$V(0) = V_0 \quad (1.1.7b)$$

Soit la **masse** du volume  $V$  au temps  $t$  définie par :

$$\begin{aligned} m &: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R} \\ (V, t) &\mapsto m(V, t) = \int_V \rho \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

**Loi 1.1.1** (Conservation de la masse). *La masse d'un volume matériel est conservée en tout temps. C'est-à-dire :*

$$\frac{D}{Dt} m = 0 \quad (1.1.9)$$

**Théorème 1.1.1** (Transport de Reynolds). *Soit  $f(\underline{x}, t)$  une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle quelconques, différentiable spatialement et temporellement. Alors,*

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f \, d\underline{x} = \int_{V(t)} \frac{D}{Dt} f + f \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, d\underline{x} \quad (1.1.10)$$

On obtient, par la loi de conservation de la masse (1.1.1) et le théorème du transport de Reynolds (1.1.1), que :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} m &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \, d\underline{x} \\ &= \int_{V(t)} \frac{D}{Dt} \rho + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, d\underline{x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Puisque (1.1.11) est vrai  $\forall V_0 \in \Omega_0$  et  $\forall t \in I$ , nous obtenons l'équation de continuité, en supposant que l'intégrande est continue :

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \nabla \cdot \underline{u} \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.12)$$

Pour un **fluide incompressible**, c'est-à-dire, un fluide dont la densité est constante le long des trajectoires, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\frac{D}{Dt}\rho = 0 \quad (1.1.13)$$

nous obtenons l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.14)$$

### 1.1.3. Équation de la quantité de mouvement

La **quantité de mouvement** d'un volume  $V$  au temps  $t$  est définie, de la même manière que la masse (1.1.8), comme :

$$\begin{aligned} \underline{P} : \Omega \times I &\rightarrow \mathbb{R} \\ (V, t) &\mapsto m(V, t) = \int_V \rho \underline{u} \, d\underline{x} \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Soit  $\Phi_{V_0}$  un volume matériel de position initiale  $V_0$  et  $V(t)$  sa trajectoire. Aussi, soit  $\underline{F} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la **force total** agissant sur  $V(t)$ .

**Loi 1.1.2** (Conservation de la quantité de mouvement). *Le taux de changement de la quantité de mouvement d'un volume  $V$  au temps  $t$  est égal à la force total  $\underline{F}$  exercé sur  $V$  au temps  $t$ . C'est-à-dire :*

$$\frac{D}{Dt}\underline{P} = \underline{F} \quad (1.1.16)$$

On obtient du théorème de conservation de la quantité de mouvement (1.1.2), que :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\underline{P} &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} \, d\underline{x} \\ &= \underline{F}(t) \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Sois  $W_0$  la frontière de  $V_0$ . Nous définissons de façon similaire :

$$W(t) = S(t)W_0 \quad (1.1.18)$$

$$W(0) = W_0 \quad (1.1.19)$$

La force  $\underline{F}$  peut être décomposé en :

$$\underline{F} = \underline{F}_V + \underline{F}_W \quad (1.1.20)$$

où  $\underline{F}_V$  est une **force volumique** générée par les forces externes et  $\underline{F}_W$  une **force de surface** générée par les forces internes. Soit  $\underline{f} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la **force par unité de masse** associé à

la force externe  $\underline{F}_V$ , c'est-à-dire :

$$\underline{F}_V(t) = \int_{V(t)} \rho \underline{f} \, d\mathbf{x} \quad (1.1.21)$$

Cauchy à déjà démontré que :

$$\underline{F}_W(t) = \int_{W(t)} t_{\hat{n}} \, d\mathbf{x} \quad (1.1.22)$$

où  $t_{\hat{n}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est le **vecteur des contraintes** de Cauchy.

**Théorème 1.1.2** (Existence et symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy). *Soit  $\hat{n}: W \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , le vecteur unitaire extérieur associé à la surface  $W(t)$ . Il existe un tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  d'ordre 2, tel que :*

(1) *Le vecteur des contraintes est une fonction linéaire du vecteur unitaire extérieur associé à la surface. C'est-à-dire :*

$$t_{\hat{n}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n} \quad (1.1.23)$$

(2)  *$\underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique. C'est-à-dire que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .*

$\underline{\underline{\sigma}}$  est appelé le **tenseur des contraintes de Cauchy**.

Par le théorème de Cauchy (1.1.2), nous pouvons réécrire (1.1.22) comme :

$$\underline{F}_W(t) = \int_{S(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n} \, d\mathbf{x} \quad (1.1.24)$$

En appliquant le théorème de la divergence à (1.1.24), on obtient :

$$\int_{W(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{n} \, d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, d\mathbf{x} \quad (1.1.25)$$

En substituant (1.1.21) et (1.1.25) dans (1.1.17), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} \, d\mathbf{x} = \int_{V(t)} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \, d\mathbf{x} + \int_{V(t)} \rho \underline{f} \, d\mathbf{x} \quad (1.1.26)$$

Finalement, on obtient pour le coté gauche de (1.1.26), à l'aide du théorème du transport de Reynolds (1.1.1) et de l'équation de continuité d'un fluide incompressible (1.1.14) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} \, d\mathbf{x} &= \int_{V(t)} \frac{D}{Dt} (\rho \underline{u}) + \rho \underline{u} \nabla \cdot \underline{u} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{V(t)} \rho \frac{D}{Dt} \underline{u} \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.1.27)$$

Par conséquent,

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D}{Dt} \underline{u} - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{f} \, d\mathbf{x} = 0 \quad (1.1.28)$$

En supposant que l'intégrande est continue, on obtient, puisque (1.1.28) est vrai  $\forall V_0 \in \Omega_0$  et  $\forall t \in I$ , **l'équation de quantité de mouvement** d'un fluide incompressible :

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{u} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.29)$$

### 1.1.4. Équation constitutive - Fluide newtonien

Pour un fluide, nous pouvons décomposer le tenseur des contraintes en deux contributions :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (1.1.30)$$

Ici,  $p: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé la **pression** (isostatique),  $\underline{\underline{\delta}}$  le **tenseur identité** et  $\underline{\underline{\tau}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est le **tenseur déviateur**, aussi appelé le **tenseur des extra-contraintes**. Dans le cas d'un **fluide newtonien**, nous pouvons déduire la forme appropriée du tenseur des extra-contraintes  $\underline{\underline{\tau}}$ , à l'aide de trois hypothèses :

- (1)  $\underline{\underline{\tau}}$  est une fonction linéaire du gradient de la vitesse  $\underline{\underline{\nabla}}u$ ;
- (2) Lorsque les éléments du fluide ne sont pas déformés, on a  $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{0}}$ , où  $\underline{\underline{0}}$  est le tenseur nul ;
- (3)  $\underline{\underline{\tau}}$  est une fonction tensoriel (cartésienne) **isotrope**, c'est-à-dire que le tenseur des extra-tensions engendré dans un élément de fluide est indépendant de son orientation.

On peut démontrer que la seule possibilité est :

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (1.1.31)$$

où  $\eta: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé la **viscosité** du fluide et  $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$  est le **tenseur des taux de déformations** définie par :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\gamma}}}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \underline{\underline{u}} &\mapsto \underline{\underline{\dot{\gamma}}}(\underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}})^\top \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

Ainsi, l'équation de quantité de mouvement d'un fluide incompressible (1.1.29) peut s'écrire sous la forme :

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{\underline{u}} = -\underline{\underline{\nabla}}p + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{\underline{f}} \quad (1.1.33)$$

avec

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}})^\top) \quad (1.1.34)$$

### 1.1.5. Équations de Navier-Stokes

En combinant l'équation de continuité (1.1.14), de conservation de la quantité de mouvement (1.1.33) et constitutive (1.1.34), nous obtenons les **équations de Navier-Stokes** pour un fluide incompressible et newtonien :

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{\underline{u}} = -\underline{\underline{\nabla}}p + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{\underline{f}} \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.35a)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{u}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.35b)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{\nabla}}\underline{\underline{u}})^\top) \quad (1.1.35c)$$

### 1.1.5.1. Forme de la divergence

En substituant directement l'équation de constitution (1.1.35c) dans l'équation du de conservation (1.1.35a) nous obtenons :

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{u} = -\underline{\nabla} p + \underline{\nabla} \cdot (\eta (\underline{\nabla} \underline{u} + (\underline{\nabla} \underline{u})^\top)) + \rho \underline{f} \quad (1.1.36)$$

Cette forme, couplé avec l'équation de continuité (1.1.35b), constitue ce que l'on appelle la **forme de la divergence** des équations de Navier-Stokes.

### 1.1.5.2. Forme de Laplace

D'abord, nous pouvons montrer que :

$$\underline{\nabla} \cdot ((\underline{\nabla} \underline{u} + (\underline{\nabla} \underline{u})^\top)) = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \underline{\nabla}^2 \underline{u} := \Delta \underline{u} \quad (1.1.37)$$

En effet, puisque le fluide est incompressible, on obtient à l'aide de la notation indicielle d'Einstein et de (1.1.14) :

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \underline{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\nabla} \underline{u})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \Delta u \quad (1.1.38a)$$

$$\underline{\nabla} \cdot ((\underline{\nabla} \underline{u})^\top) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\nabla} \underline{u})_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0 \quad (1.1.38b)$$

En supposant que la viscosité est constante dans l'espace et en substituant dans la forme de la divergence (1.1.36), nous obtenons :

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{u} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{u} + \rho \underline{f} \quad (1.1.39)$$

Il s'agit de la **forme de Laplace**. Ainsi, les equations que Navier-Stokes se réduisent, dans la forme de Laplace, à :

$$\rho \frac{D}{Dt} \underline{u} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{u} + \rho \underline{f} \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.40a)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times I \quad (1.1.40b)$$

Il s'agit de la forme que nous allons utiliser tout au long de ce travail.

## 1.2. DISCRÉTISATION TEMPORELLE

Dans cette section, nous allons décrire un schéma de discretisation temporel lagrangien basé sur une méthode de projection. Pour plus d'information, on peut consulter les articles [4, 5, 8, 11, 15, 17, 19].

Soit  $\Delta t$ , un intervalle de temps et la notation  $t^n = n\Delta t$ . Soit  $i \in \Phi$  une particule de position initiale  $\xi_i$ , en  $t = 0$ . Nous allons utiliser les notation  $\underline{x}_i^n, g_i^n$  pour désigner les valeurs

approximatives de  $\underline{x}_i(t^n)$ ,  $g(\underline{x}_i(t^n), t^n)$ , ou  $g: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$  est une fonction quelconque. Aussi, nous allons supposer que  $\underline{x}_i$  est la valuation de  $\underline{x}_i(t)$  en  $t$ .

D'abord, intégrons la forme de Laplace (1.1.40a) entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$ , le long des trajectoires :

$$\begin{aligned} \rho \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt} \underline{u}(\underline{x}_i(t), t) dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} -\underline{\nabla} p(\underline{x}_i, t) + \eta \Delta \underline{u}(\underline{x}_i, t) + \rho \underline{f}(\underline{x}_i(t), t) dt \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} -\underline{\nabla} p(\underline{x}_i, t) + \rho \underline{f}(\underline{x}_i(t), t) dt + \eta \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta \underline{u}(\underline{x}_i, t) dt \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Nous allons discrétiser les intégrales de la façon suivante : Par la méthode du point milieu et différence centrée, nous obtenons pour l'intégrale de la dérivée matérielle :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt} \underline{u}(\underline{x}_i(t), t) dt = \underline{u}_i^{n+1} - \underline{u}_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.2.2)$$

Ensuite, on discrétise l'intégrale du gradient de pression et de la force externe à l'aide de la méthode du point milieu :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} -\underline{\nabla} p(\underline{x}_i, t) + \rho \underline{f}(\underline{x}_i(t), t) dt = \Delta t \left( -(\underline{\nabla} p)_i^{n+\frac{1}{2}} + \rho \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.2.3)$$

Finalement, l'intégrale du laplacien du champs de vitesse sera discrétisé à l'aide de la méthode du trapèze :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta \underline{u} dt = \frac{\Delta t}{2} \left( (\Delta \underline{u})_i^n + (\Delta \underline{u})_i^{n+1} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.2.4)$$

En substituant (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.4) dans (1.2.1), on obtient une approximation d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  de l'équation de la quantité du mouvement (1.1.40a) :

$$\frac{\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{2} \left( (\Delta \underline{u})_i^n + (\Delta \underline{u})_i^{n+1} \right) - \frac{1}{\rho} \left( (\underline{\nabla} p)_i^{n+\frac{1}{2}} + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (1.2.5)$$

où,  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  est appelé le **coefficient de viscosité dynamique**.

Notons que  $(\underline{\nabla} p)_i^{n+\frac{1}{2}} = \underline{\nabla}^{n+\frac{1}{2}} p_i^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $(\Delta \underline{u})_i^{n+1} = \Delta^{n+1} \underline{u}_i^{n+1}$  et  $(\Delta \underline{u})_i^n = \Delta^n \underline{u}_i^n$ . En effet, lorsque nous discrétiserons le laplacien et le gradient au pas de temps  $n$ , ils deviendront fonctions de la configuration des particules au pas  $n$ . Nous aurions pu, par exemple, discrétiser l'intégrale du laplacien du champs de vitesse à l'aide de la méthode du point milieu et approximer  $u^{n+\frac{1}{2}}$  par la moyenne de  $u^{n+1}$  et  $u^n$  nous aurions considéré  $\Delta^{n+\frac{1}{2}}$ . Nous aurions aussi obtenu une approximation d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ . Par contre, dans un schéma lagrangien ou les domaines changent au fil du temps, il semble plus naturel de discrétiser les opérateurs de dérivées spatiales en fonction du domaine ou ils sont évalués. Nous laisserons tomber les notation  $\Delta^n$  et  $\underline{\nabla}^n$ , et allons seulement écrire  $\Delta$  et  $\underline{\nabla}$ . Les champs sur lesquels ils seront appliqués décideront des domaines sur lesquels ils seront discrétisés.

Pour revenir à l'approximation temporelle discrète (1.2.5), on remarque que la vitesse et la pression y sont couplées. Pour remédier à ce problème, nous allons utiliser le théorème de **décomposition de Helmholtz-Hodge** et le fait que  $\underline{u}^{n+1}$  est un champ incompressible.

**Théorème 1.2.1** (Décomposition de Helmholtz-Hodge [5, 9, 27]). *Un champ vectoriel  $\underline{w} \in \mathbf{L}(\Omega)$ , sur un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  lisse, admet une unique décomposition orthogonale en un champ gradient  $\underline{w}_1 = \underline{\nabla}\varphi$ , avec  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , et un champ à divergence nulle  $\underline{w}_2 = \underline{u}$  parallèle à la frontière  $\Gamma$ , c'est-à-dire, tel que  $\hat{n} \cdot \underline{u} = 0$  où  $\hat{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à  $\Gamma$ . Ici,  $\mathbf{L}(\Omega)$  est l'espace des fonctions vectorielles de carré intégrable et  $H^1(\Omega)$  est le sous espace de  $L(\Omega)$ , l'espace des fonctions scalaires de carré intégrable, dont le gradient est dans  $\mathbf{L}(\Omega)$ .*

*Il suit que  $\underline{w}$  est uniquement déterminé lorsque sa divergence et son rotationnel sont assignés, en plus de sa composante normale  $\hat{n} \cdot \underline{w} = w_n$  sur  $\Gamma$ . Ainsi,  $\underline{w}$  peut être écrit comme :*

$$\underline{w} = \underline{u} + \underline{\nabla}\varphi \quad (1.2.6)$$

*où la condition aux limites suivante est satisfaite :*

$$\hat{n} \cdot \underline{w} = \hat{n} \cdot \underline{\nabla}\varphi = w_n \quad (1.2.7)$$

*Bien entendu,  $\varphi$  est unique à une constante près.*

**Remarque 1.2.1.** *Notons que cette condition aux limites est suffisante pour l'unicité et l'orthogonalité de la décomposition mais pas nécessaire [5, 27]. Nous y reviendrons lorsque nous discuterons des conditions aux limites dans un prochain chapitre.*

**Remarque 1.2.2.** *Les conditions sur la régularité de  $\Omega$  peuvent être relaxées en utilisant la notion de dérivée faible [2, 20]. On peut donc montrer que la formulation faible de ce théorème reste vrai lorsque  $\Omega$  est un domaine lipschitzien.*

Ainsi, à l'aide de  $\underline{u}^{n+1}$  et d'un potentiel scalaire auxiliaire  $\phi^{n+1}$ , nous allons construire un champ vectoriel auxiliaire  $\underline{u}^*$  qui satisfait le théorème de Helmholtz-Hodge (1.2.1). Nous allons appeler  $\underline{u}^*$  le champ de **vitesse auxiliaire** et  $\phi^{n+1}$  le champ de **pression auxiliaire**. Notons que, puisque  $\underline{u}^{n+1}$  est un champ vectoriel sur le domaine  $\Omega(t^n + 1)$ ,  $\underline{u}^*$  et  $\phi^{n+1}$  seront eux aussi des champs sur  $\Omega(t^n + 1)$ .

Dans ce travail, nous allons utiliser la décomposition :

$$\underline{u}^* = \underline{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla}\phi^{n+1} \quad (1.2.8)$$

Nous avons décidé de normaliser  $\phi^{n+1}$  par  $\frac{\Delta t}{\rho}$  pour que, lorsque  $\Delta t$  est petit, son comportement soit similaire à celui de la pression  $p^{n+\frac{1}{2}}$  dans notre schéma pour obtenir le bon ordre de convergence près des frontières [7, 11].

Puisque  $\underline{u}^{n+1}$  est incompressible,  $\phi^{n+1}$  doit satisfaire :

$$\Delta\phi^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^* \quad (1.2.9)$$

Aussi, en substituant  $\underline{u}_i^{n+1}$  par la décomposition (1.2.8) dans (1.2.5), nous obtenons :

$$\frac{\underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} \phi_i^{n+1} - \underline{u}_i^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{2} \Delta \left( \underline{u}_i^n + \underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} \phi_i^{n+1} \right) - \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p_i^{n+\frac{1}{2}} + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (1.2.10)$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{\underline{u}_i^* - \underline{u}_i^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \left( p_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^{n+1} + \frac{\nu \Delta t}{2} \Delta \phi_i^{n+1} \right) + \frac{\nu}{2} \Delta (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^*) + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} q_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\nu}{2} \Delta (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^*) + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

où nous avons introduit le champ scalaire (définie à une constante près) :

$$q_i^{n+\frac{1}{2}} = p_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^{n+1} + \frac{\nu \Delta t}{2} \Delta \phi_i^{n+1} \quad (1.2.12a)$$

$$= p_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^{n+1} + \frac{\eta}{2} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}_i^* \quad (1.2.12b)$$

Selon la valeur donnée à  $q^{n+\frac{1}{2}}$ , nous obtiendrons différents schémas de projection temporel.

Finalement, nous obtenons la nouvelle position des particules en intégrant l'édo (1.1.1) décrivant la trajectoire de  $i$  entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt} \underline{x}_i(t) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{u}(\underline{x}_i(t), t) dt \quad (1.2.13)$$

Par la méthode du point milieu suivi d'une différence centrée, nous obtenons pour le coté gauche de (1.2.13) :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt} \underline{x}_i(t) dt = \underline{x}_i^{n+1} - \underline{x}_i^n + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.2.14)$$

Pour ce qui est du coté droit de (1.2.13), nous obtenons, par la méthode du trapèze :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{u}(\underline{x}_i(t), t) dt = \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.2.15)$$

Par conséquent, en substituant les discrétisations (1.2.14) et (1.2.15) dans (1.2.13), nous obtenons la positions au prochain pas de temps :

$$\underline{x}_i^{n+1} - \underline{x}_i^n = \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (1.2.16)$$

### 1.2.1. Schéma PMIII

En posant  $q^{n+\frac{1}{2}} = 0$ , nous obtenons le schéma d'évolution temporelle d'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ , appelé **schéma PMIII** [7, 17] :

$$\underline{u}_i^* - \frac{\nu \Delta t}{2} \Delta \underline{u}_i^* = \underline{u}_i^n + \Delta t \left[ \frac{\nu}{2} \Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (1.2.17a)$$

$$\Delta \phi^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^* \quad (1.2.17b)$$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \underline{\nabla} \phi^{n+1} \quad (1.2.17c)$$

$$p_i^{n+\frac{1}{2}} = \phi_i^{n+1} - \frac{\eta}{2} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^* \quad (1.2.17d)$$

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}) \quad (1.2.17e)$$

L'un des avantages de ce schéma est que le calcul de la pression est facultatif lorsque les problèmes aux frontières ne la font pas intervenir. Par contre, nous aurions pu poser d'autres valeurs à  $q^{n+\frac{1}{2}}$  et ainsi obtenir d'autres schémas de projections. Par exemple, en posant  $q^{n+\frac{1}{2}} = p^{n-\frac{1}{2}}$  nous aurions obtenu un schéma appelé **PMII**. Puisque le schéma PMIII est plus simple, c'est celui-ci que nous allons utiliser dans ce mémoire.

### 1.3. ADIMENSIONNALISATION

#### 1.3.1. Variables adimensionnées

Lors des calculs numériques, nous allons travailler avec la forme adimensionnée des équations de Navier-Stokes et de nos schémas discrets. Pour se faire, nous allons adimensionner nos variables primitives en posant :

$$\underline{x} = L\underline{x}^*, \underline{u} = U\underline{u}^*, t = \frac{L}{U}t^*, p = \frac{\eta U}{L}p^*. \quad (1.3.1)$$

Ici,  $L$  est une longueur de référence et  $U$  une vitesse de référence, toutes deux étant représentatives des échelles de grandeurs du problème physique que nous désirons résoudre. Par la règle de dérivée en chaîne, nous obtenons les opérateurs différentielles adimensionnées :

$$\underline{\nabla} = \frac{1}{L}\underline{\nabla}^*, \Delta = \frac{1}{L^2}\Delta^*, \frac{D}{Dt} = \frac{U}{L} \frac{D}{Dt^*}. \quad (1.3.2)$$

Notons que ceci nous amènes à la forme adimensionnée du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= -p\underline{\underline{\delta}} + \eta (\underline{\nabla}\underline{u} + (\underline{\nabla}\underline{u})^\top) \\ &= -\frac{\eta U}{L}p^*\underline{\underline{\delta}} + \eta \left( \frac{1}{L}\underline{\nabla}^*U\underline{u}^* + \left( \frac{1}{L}\underline{\nabla}^*U\underline{u}^* \right)^\top \right) \\ &= \frac{\eta U}{L} \left( -p^*\underline{\underline{\delta}} + (\underline{\nabla}^*\underline{u}^* + (\underline{\nabla}^*\underline{u}^*)^\top) \right) \\ &= \frac{\eta U}{L} \underline{\underline{\sigma}}^* \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Aussi, pour simplifier la forme finale de nos équations, nous allons poser :

$$\underline{f} = \frac{U^2}{L} \underline{f}^* \quad (1.3.4)$$

### 1.3.2. Forme de Laplace adimensionnée des équations de Navier-Stokes

En substituant les variables primitives adimensionnées (1.3.1) et opérateurs adimensionnés (1.3.2) dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans sa forme de Laplace (1.1.40a), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U}{L} \frac{D}{Dt^*} (U \underline{u}^*) &= -\frac{1}{L} \nabla^* \left( \frac{\eta U}{L} p^* \right) + \eta \frac{1}{L^2} \Delta^* (U \underline{u}^*) + \rho \frac{U^2}{L} \underline{f}^* \\
\iff \frac{\rho U^2}{L} \frac{D}{Dt^*} \underline{u}^* &= -\frac{\eta U}{L^2} \nabla^* p^* + \frac{\eta U}{L^2} \Delta^* \underline{u}^* + \frac{\rho U^2}{L} \underline{f}^* \\
\iff \frac{D}{Dt^*} \underline{u}^* &= -\frac{\eta}{\rho U L} \nabla^* p^* + \frac{\eta}{\rho U L} \Delta^* \underline{u}^* + \underline{f}^* \\
\iff \frac{D}{Dt^*} \underline{u}^* &= -\frac{1}{\text{Re}} \nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \underline{u}^* + \underline{f}^* \\
\iff \frac{D}{Dt^*} \underline{u}^* &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^* \cdot \underline{\sigma}^* + \underline{f}^*
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

où,  $\text{Re} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$  est appelé le **nombre de Reynolds**. Pour résumer, on a obtenu la forme de Laplace adimensionnée des équations de Navier-Stokes :

$$\frac{D}{Dt^*} \underline{u}^* = -\frac{1}{\text{Re}} \nabla^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \underline{u}^* + \underline{f}^* \quad \text{dans } \Omega^* \times I^* \tag{1.3.6a}$$

$$\nabla^* \cdot \underline{u}^* = 0 \quad \text{dans } \Omega^* \times I^* \tag{1.3.6b}$$

où  $\Omega^* \times I^* = \bigcup_{t^* \in I^*} \Omega^*(t^*) \times \{t^*\}$ ,  $\Omega^*(t^*) = \{S(t^*) \xi_i^* \mid \xi_i^* \in \Omega_0^*\}$ ,  $I^* = \{t^* = \frac{L}{U} t \mid t \in I\}$  et  $\Omega_0^* = \{\xi_i^* = \frac{1}{L} \xi_i \mid \xi_i \in \Omega_0\}$  sont les domaines géométriques et temporel adimensionnés.

### 1.3.3. Schéma PMIII adimensionné

Nous devons maintenant rendre non-dimensionnelles les variables auxiliaires introduites dans la décomposition de Helmholtz-Hodge. Par (1.2.17b), (1.2.17c) et (1.2.17d), on observe que, dans notre schéma, nous avons :

$$\underline{u}^* = \underline{u} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad \phi = p + \mathcal{O}(\Delta t). \tag{1.3.7}$$

Ainsi, pour  $\Delta t$  petit,  $\underline{u}^*$  aura le même ordre de grandeur que  $\underline{u}$  et  $\phi$  le même que  $p$ . Nous allons donc les adimensionnées à l'aide des mêmes quantités :

$$\underline{u}^* = U \underline{u}^{*,*}, \quad \phi = \frac{\eta U}{L} \phi^*. \tag{1.3.8}$$

Ainsi, notre schéma discret PMIII (1.2.17) devient, sous forme adimensionnée :

$$\underline{u}_i^{*,*} - \frac{\Delta t^*}{2 \text{Re}} \Delta^* \underline{u}_i^{*,*} = \underline{u}_i^{n,*} + \Delta t^* \left( \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta^* \underline{u}_i^{n,*} + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2},*} \right) \tag{1.3.9a}$$

$$\Delta^* \phi_i^{n+1,*} = \frac{\text{Re}}{\Delta t^*} \nabla^* \cdot \underline{u}_i^{*,*} \tag{1.3.9b}$$

$$\underline{u}_i^{n+1,\star} = \underline{u}_i^{*,\star} - \frac{\Delta t^\star}{\text{Re}} \underline{\nabla}^\star \phi_i^{n+1,\star} \quad (1.3.9c)$$

$$p_i^{n+\frac{1}{2},\star} = \phi_i^{n+1,\star} - \frac{1}{2} \underline{\nabla}^\star \cdot \underline{u}_i^{*,\star} \quad (1.3.9d)$$

$$\underline{x}_i^{n+1,\star} = \underline{x}_i^{n,\star} + \frac{\Delta t^\star}{2} (\underline{u}_i^{n,\star} + \underline{u}_i^{n+1,\star}) \quad (1.3.9e)$$

On remarque que (1.3.9c) peut se réécrire, en utilisant (1.3.9b) comme :

$$\begin{aligned} p_i^{n+\frac{1}{2},\star} &= \phi_i^{n+1,\star} - \frac{\Delta t^\star}{2 \text{Re}} \Delta^\star \phi_i^{n+1,\star} \\ &= \phi_i^{n+1,\star} - \frac{\eta \Delta t^\star}{2 \rho U L} \Delta^\star \phi_i^{n+1,\star} \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Ainsi, on peut observer que le second terme de (1.3.9c) est un terme de viscosité qui crée, potentiellement, une couche limite lors de l'évaluation de la pression près des frontières.

Dans ce qui suit, sauf lorsque spécifié autrement, nous allons prendre pour acquis que toutes les variables seront adimensionnées et nous laisserons tomber la notation étoilée  $\star$ , afin d'alléger la notation.

# Chapitre 2

---

## SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS

### 2.1. SMOOTHED-PARTICLE-HYDRODYNAMICS

La méthodologie smoothed-particle-hydrodynamics (SPH) est une méthode de discrétisation spatiale développée indépendamment par Gingold et Monaghan [13] et Lucy [26], en 1977. Dans cette méthode, un fluide est représenté par un ensemble de particules, considérées comme des éléments de masses, possédant des propriétés individuelles et qui se déplacent selon les équations régissant le système. Cette méthode découle du principe d'interpolation intégrale et de l'**identité de convolution** sur un domaine  $\Omega$  :

$$f(\underline{x}) = \int_{\Omega} f(\underline{x}') \delta(\underline{x} - \underline{x}') \, d\underline{x}' \quad (2.1.1)$$

où,  $\delta$  est la **distribution de delta-Dirac**, qui satisfait la contrainte :

$$\int_{\Omega} \delta(\underline{x}) \, d\underline{x} = 1 \quad (2.1.2)$$

**Remarque 2.1.1.** *Dans ce qui suit, nous allons considérer un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , puisque les écoulements que nous allons considérer sont bidimensionnels. Par contre, la méthodologie SPH se généralise facilement à de plus grandes dimensions.*

D'abord, nous approximons la distribution  $\delta(\underline{x} - \underline{x}')$  dans l'équation (2.1.1) par une **fonction de lissage**  $W(\underline{x} - \underline{x}', h)$ , munie d'une **longueur de lissage**  $h$  fixée définissant un **support compact** :

$$\text{Supp}(W) := \{\underline{x} \in \Omega \mid W(\underline{x}, h) \neq 0\} \quad (2.1.3)$$

Puisque nous travaillons dans  $\mathbb{R}^2$ , dire que le support est compact veut dire que  $\text{Supp}(W)$  est fermé et borné. Nous allons utiliser la notation  $\text{Supp}_{\underline{x}}(W) = \{\underline{x}' \in \Omega \mid W(\underline{x} - \underline{x}', h) \neq 0\}$  pour désigner le support compact de  $W$  centré en  $\underline{x}$ .

En remplaçant la distribution de delta-Dirac, dans (2.1.1), par une fonction de lissage, dont nous allons énoncer les propriétés sous peu, et en notant que l'intégrande est nulle à

l'extérieur du support compact, nous obtenons **l'approximation de lissage** de  $f$  :

$$\langle f(\underline{x}) \rangle = \int_{\text{Supp}_{\underline{x}}(W)} f(\underline{x}') W(\underline{x} - \underline{x}', h) d^2 \underline{x}' \quad (2.1.4)$$

Notons que l'approximation (2.1.4) sera toujours justifiée lorsque le  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire, lorsque le domaine ne possède pas de frontière. En effet, dans un tel cas, le support compact fixé sera toujours entièrement contenu dans le domaine, c'est-à-dire  $\text{Supp}_{\underline{x}}(W) \subset \Omega \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ . Par contre, il est possible que ceci ne sera pas le cas dans un domaine dont la frontière ne sera pas vide, par exemple, lorsqu'il s'agit d'une bande infinie ou bien d'un domaine borné.

**Remarque 2.1.2.** *Dans le reste de ce chapitre, nous allons supposer que  $\Omega = \mathbb{R}^2$  pour éviter les problèmes mentionnés près des frontières. Le chapitre suivant sera consacré au traitement des frontières.*

### 2.1.1. Fonction de lissage

Afin de bien approximer la distribution de delta-Dirac, la fonction de lissage devrait satisfaire les deux propriétés suivantes :

#### 1. Aire unité:

$$\int_{\Omega} W(\underline{x} - \underline{x}', h) d^2 \underline{x}' = 1 \quad (2.1.5)$$

#### 2. Convergence au sens des distributions:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\underline{x}, h) = \delta(\underline{x}) \quad (2.1.6)$$

De plus, il est généralement suggéré, dans la littérature [24], de lui imposer les propriétés additionnelles suivantes :

#### 3. Support compact sphérique: Pour un certain $k > 0$ , $W$ admet un support compact sphérique de rayon $kh$ :

$$\text{Supp}(W) = B(\underline{0}, kh) := \{\underline{x} \in \Omega \mid \|\underline{x}\| \leq kh\} \quad (2.1.7)$$

c'est-à-dire :

$$W(\underline{x}, h) = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \setminus B(\underline{0}, kh) := \{\underline{x}' \in \Omega \mid \|\underline{x}'\| > kh\} \quad (2.1.8)$$

#### 4. Régularité: $W$ est continument différentiable sur $\Omega$ :

$$W \in \mathcal{C}^1(\Omega) \quad (2.1.9)$$

#### 5. Symétrie: $W$ admet une symétrie axiale autour de l'origine :

$$W(\underline{x}, h) = W(-\underline{x}, h) \quad \forall \underline{x} \in \text{Supp}(W) \quad (2.1.10)$$

**6. Décroissance monotone:** Elle doit décroître monotonement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de  $\underline{x} = \underline{0}$  :

$$\frac{\partial}{\partial r} W(\underline{x}, h) < 0 \quad \forall \underline{x} \in \text{Supp}(W) \setminus \{\underline{0}\} \quad (2.1.11)$$

où  $r = \|\underline{x}\|$ .

**7. Définie positive:**  $W$  doit être positive sur son support compact :

$$W(\underline{x}, h) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \text{Supp}(W) \quad (2.1.12)$$

Ces propriétés additionnelles sont basées sur des justifications physiques. Si on a une densité uniforme de particules dans notre domaine, une particule devrait avoir, localement, une distribution uniforme et presque symétrique de voisins dont l'influence varie seulement en fonction de la distance, d'où les propriétés 3 et 5. Aussi, les forces unissant les molécules dans un fluide diminuent rapidement de façon monotone en fonction de la distance qui les séparant, d'où 6. Il est aussi justifié de supposer que le champ de force devrait être plutôt lisse, d'où 4. Pour ce qui est de 7, elle nous permet d'éviter d'obtenir des résultats aberrants lors des calculs pour les fluides, par exemple, d'obtenir des densités négatives [24]. De plus, dans un problème où les particules restent relativement bien distribuées, de telles conditions sont justifiées et permettent une économie de calcul. Remarquons que la propriété 5 nous permet de définir la fonction de lissage en terme de la distance relative à l'origine et donc d'écrire :

$$\begin{aligned} W(\underline{x} - \underline{x}', h) &= W(\|\underline{x} - \underline{x}'\|_2, h) \\ &= W(r, h) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

où  $r = \|\underline{x} - \underline{x}'\|_2$  est la distance entre  $\underline{x}$  et  $\underline{x}'$ . De plus, les conditions 3 et 4 nous garantissent que la fonction de lissage, et sa dérivée, soient nulles sur la frontière du support compact.

Notons toutefois que, dans les problèmes où il y a de grandes variations de densité, nous pourrions nous tourner vers des fonctions de lissages possédants d'autres caractéristiques. Par exemple, nous pourrions nous tourner vers des fonctions asymétriques, à supports compacts non sphériques, des fonctions de lissages admettant des valeurs négatives ou même des comportements oscillatoires. Nous allons observer, plus tard, que près des frontières, nous aurons une pénurie de particules qui créera, potentiellement, une distribution asymétrique et incomplète de particules dans le support compact de la fonction de lissage.

Pour combattre cette pénurie, nous allons plutôt créer des particules imaginaires qui auront pour but de résoudre ce problème. De plus, nous allons donner des valeurs à leurs champs permettant l'application des conditions aux limites. Par contre, lorsque la frontière inclus des coins, il ne sera pas toujours possible de créer des particules partout dans le support compact. Dans cette situation, nous allons normaliser la fonction de lissage [23].

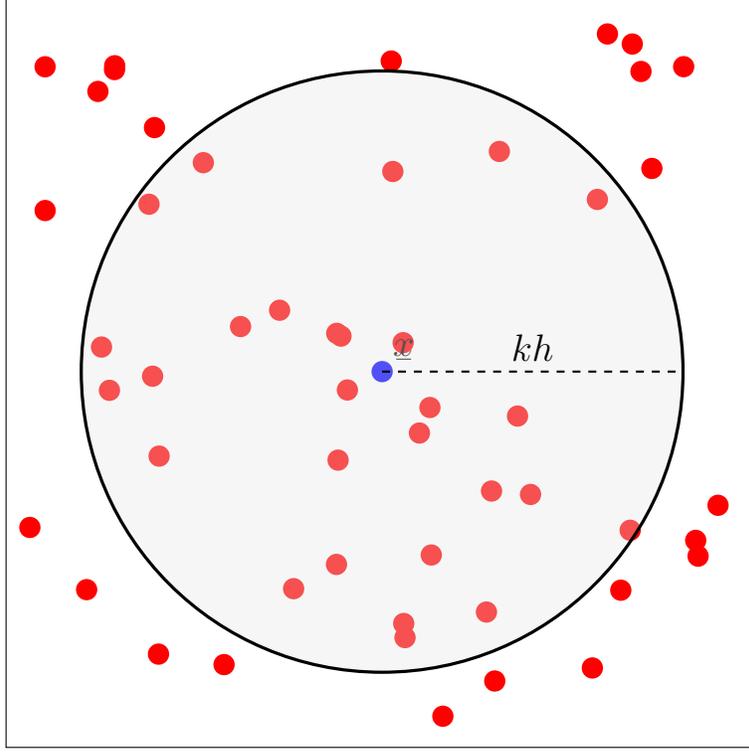


FIGURE 2.1. Support compact de la fonction de lissage

Dans ce travail, nous allons utiliser, comme fonction de lissage, la fonction spline cubique. Il s'agit de l'une des moins coûteuses [6, 13, 18], en plus d'être l'une des plus utilisées. Aussi, nous allons utiliser une longueur de lissage proportionnelle à la distance initiale entre les particules, c'est-à-dire  $h = \alpha \Delta x$ , où  $\Delta x$  sera la distance initiale entre les particules. En effet, plusieurs auteurs suggèrent d'utiliser une telle relation [13, 18]. Ceci permet de lier l'ordre de convergence temporel et spatial en plus de définir une relation entre l'erreur de discrétisation et celle de lissage [34]. Si nous posons  $q = \frac{r}{h}$ , la fonction **spline cubique** est définie par :

$$W(r, h) = w_0 \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3 & \text{si } 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - q)^3 & \text{si } 1 \leq q < 2 \\ 0 & \text{si } q \geq 2 \end{cases} \quad (2.1.14)$$

avec la constante dimensionnelle  $w_0 = \frac{15}{7\pi h^2}$ , lorsque  $\dim(\Omega) = 2$ . On observe qu'elle satisfait toutes les conditions mentionnées plus haut.

### 2.1.2. Erreur de lissage

Munie d'une fonction de lissage qui satisfait les propriétés mentionnées dans la section précédente, il est maintenant possible de faire une analyse de l'erreur de lissage. Supposons

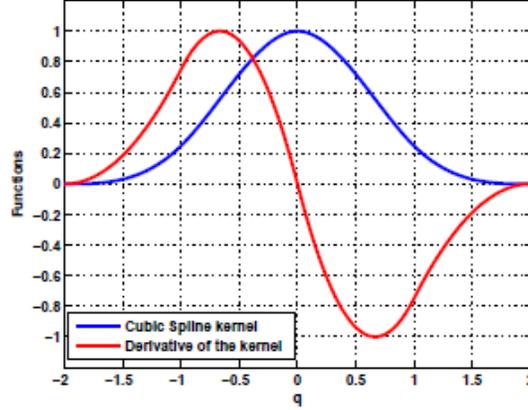


FIGURE 2.2. Fonction spline cubique et sa dérivée

que  $\Omega = \mathbb{R}^2$  et  $\underline{x} \in \Omega$ . Soit la boule centrée en  $\underline{x}$  de rayon  $kh$  :

$$B_{\underline{x}} = B(\underline{x}, kh) := \{\underline{x}' \in \Omega \mid \|\underline{x} - \underline{x}'\|_2 \leq kh\} \quad (2.1.15)$$

Ainsi,  $\text{Supp}_{\underline{x}}(W) = B_{\underline{x}}$  lorsque  $k = 2$  pour la fonction spline cubique (2.1.14). C'est ce que nous allons supposer à partir de maintenant.

Soit  $f$  un champ scalaire. Bien entendu, l'argument se généralisera pour les champs vectoriels et tensoriels en l'appliquant à chacune des composantes. Nous avons l'expansion de Taylor de  $f(\underline{x}')$  autour de  $\underline{x}$  :

$$f(\underline{x}') = f(\underline{x}) + [\nabla f]_{\underline{x}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}') + \mathcal{O}(\|\underline{x} - \underline{x}'\|_2^2) \quad (2.1.16)$$

Puisque  $W$  est symétrique et que  $\underline{x} - \underline{x}'$  est antisymétrique, on observe que  $(\underline{x} - \underline{x}') W(\underline{x} - \underline{x}', h)$  est antisymétrique. Ainsi, l'intégrale de  $(\underline{x} - \underline{x}') W(\underline{x} - \underline{x}', h)$  doit être nulle. De plus, nous avons  $\|\underline{x} - \underline{x}'\|_2 \leq 2h = \mathcal{O}(h)$ . Ainsi, En substituant le développement de Taylor (2.1.16) dans l'approximation de lissage (2.1.4), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \langle f(\underline{x}) \rangle &= \int_{B_{\underline{x}}} f(\underline{x}') W(\underline{x} - \underline{x}', h) d^2 \underline{x}' \\ &= \int_{B_{\underline{x}}} [f(\underline{x}) + [\nabla f]_{\underline{x}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}') + \mathcal{O}(\|\underline{x} - \underline{x}'\|_2^2)] W(\underline{x} - \underline{x}', h) d^2 \underline{x}' \\ &= [f(\underline{x}) + \mathcal{O}(h^2)] \int_{B_{\underline{x}}} W(\underline{x} - \underline{x}', h) d^2 \underline{x}' + [\nabla f]_{\underline{x}} \cdot \int_{B_{\underline{x}}} (\underline{x} - \underline{x}') W(\underline{x} - \underline{x}', h) d^2 \underline{x}' \\ &= f(\underline{x}) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Bien entendu, le terme contenant le gradient ne disparaît pas nécessairement lorsque le support compact est tronqué par une frontière. Nous discuterons de ce problème, et comment le contourner, dans le prochain chapitre.

### 2.1.3. Discrétisation de l'approximation de lissage

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^2$  notre domaine géométrique et  $\Phi$  le domaine matériel. Ici,  $\Phi$  correspond à une discrétisation de notre domaine et est donc dénombrable. Commençons par assigner à chaque particule  $i \in \Phi$ , une position  $\underline{x}_i \in \Omega$ , qui correspond à son centre de masse, ainsi qu'une **aire**  $\mathcal{A}_i$ .

Ensuite, définissons les ensembles :

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(i, kh) = \{j \in \Phi \mid \underline{x}_j \in B_{\underline{x}_i}\} \subset \Phi, \quad (2.1.18)$$

$$\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_i \setminus \{i\}, \quad (2.1.19)$$

Il s'agit de l'analogie du support compact de  $W$  pour  $\Phi$ . Nous allons donc nommer  $B_{\underline{x}}$  le **support compact géométrique** et  $\mathcal{B}$  le **support compact matériel**.

Supposons, pour simplifier, que  $f$  est un champ scalaire. Pour ce qui est des champs vectoriels et tensoriels, l'argument se généralisera en l'appliquant à chacune des composantes du champ.

Nous allons discrétiser l'approximation de lissage en  $i$  par une sommation sur les éléments d'aires des particules de  $\mathcal{B}_i$ .

$$\langle f(\underline{x}_i) \rangle = \int_{B_{\underline{x}_i}} f(\underline{x}_j) W(\underline{x}_i - \underline{x}_j, h) d^2 \underline{x}_j \quad (2.1.20a)$$

$$\approx \sum_{j \in \mathcal{B}_i} \mathcal{A}_j f(\underline{x}_j) W(\underline{x}_i - \underline{x}_j, h) \quad (2.1.20b)$$

Notons (2.1.20b) par  $f_i$  l'**approximation matérielle**, ou encore l'**approximation particulière**, de  $\langle f(\underline{x}_i) \rangle$  attribuée à la particule  $i$ . En posant  $W_{ij,h} := W(\underline{x}_i - \underline{x}_j, h)$ , cette approximation s'écrit comme :

$$f_i = \sum_{j \in \mathcal{B}_i} \mathcal{A}_j f_j W_{ij,h} \quad (2.1.21)$$

Remarquons qu'en substituant  $f_i = (\mathcal{A}_i)^{-1}$  dans la forme discrète (2.1.21), nous obtenons une approximation particulière de l'aire attribuée à chacune des particules :

$$\mathcal{A}_i = \left( \sum_{j \in \mathcal{B}_i} W_{ij,h} \right)^{-1} \quad (2.1.22)$$

Il est bien de souligner qu'en posant  $m_i = \mathcal{A}_i \rho_i$ , nous retrouvons l'approximation discrète qui apparaît généralement dans la littérature. La raison pour laquelle nous avons décidé de considérer des éléments d'aires et non des éléments de masses de densités variables est que, dans les problèmes que nous allons considérer, nous allons supposer la densité constante. Par contre, si nous avions, par exemple, considéré des écoulements compressibles ou bien multiphasiques, il aurait été plus judicieux de conserver l'approche originale.

### 2.1.4. Approximation des opérateurs différentiels

Pour obtenir les approximations de lissages des opérateurs différentiels, nous pouvons naïvement substituer ces opérateurs dans l'approximation de lissage (2.1.4) puis intégrer par partie en utilisant les propriétés de la fonction de lissage. Par contre, plusieurs problèmes surviennent lorsque nous employons cette tactique [29, 31, 38]. Par exemple, ces approximations ne satisfont pas certaine lois de conservation physiques, telle que la loi de conservation du moment angulaire ou même la loi de la conservation de la quantité de mouvement. De plus, les approximations obtenues ne seront généralement pas consistantes. Finalement, cette méthode ne nous permet pas d'obtenir des matrices symétriques lors de la discrétisation de notre schéma. Par conséquent, nous allons utiliser des approximations plus élaborées [35, 36] basées sur l'intégration du développement de Taylor.

Dans ce qui suit, nous allons employer la convention de sommation d'Einstein. Nous allons utiliser des *surindices* pour dénoter les composantes de nos vecteurs et tenseurs. Par exemple, nous allons écrire  $f^p$  pour dénoter la  $p$ -ième composante d'un vecteur  $\underline{f}$ . Aussi, lorsqu'un *surindice* sera répété dans un même terme, il sera sous entendu qu'il s'agit d'une sommation sur les composantes, par exemple,  $a^i b^i = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^n b^n$ , où  $n$  est la dimension de  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$ .

#### 2.1.4.1. Discrétisation de la dérivée première spatiale

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^2$  notre domaine géométrique,  $\Phi$  le domaine matériel,  $i \in \Phi$  une particule et  $\underline{x}_i \in \Omega$  sa position associée. Aussi, notons la frontière du support compact géométrique de la fonction de lissage  $W$  centrée en  $\underline{x}_i$  :

$$\partial B_{\underline{x}_i} := \left\{ \underline{x}_j \in \Omega \mid \|\underline{x}_i - \underline{x}_j\|_2 = kh \right\} \quad (2.1.23)$$

Pour obtenir une approximation de lissage naïve de la dérivée première nous allons substituer  $\partial_{x_i^k} f^p(\underline{x}_i)$  dans (2.1.4). Ensuite, en utilisant l'intégration par partie et les propriétés du support compact de  $W$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f^p(\underline{x}_i)}{\partial x_i^k} \right\rangle &= \int_{B_{\underline{x}_i}} \frac{\partial f^p(\underline{x}_j)}{\partial x_j^k} W(\underline{x}_{ij}, h) \, d^2 \underline{x}_j \\ &= \int_{\partial B_{\underline{x}_i}} [f^p(\underline{x}_j) W(\underline{x}_{ij}, h)] n^k \, d^1 \underline{x}_j - \int_{B_{\underline{x}_i}} f^p(\underline{x}_j) \frac{\partial W(\underline{x}_{ij}, h)}{\partial x_j^k} \, d\underline{x}_j \\ &= - \int_{B_{\underline{x}_i}} f^p(\underline{x}_j) \frac{\partial W(\underline{x}_{ij}, h)}{\partial x_j^k} \, d^2 \underline{x}_j \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

où,  $\underline{x}_{ij} = \underline{x}_i - \underline{x}_j$ . On remarque que prendre la dérivée première de notre fonction est équivalent à multiplier notre fonction par la dérivée de la fonction de lissage puis intégrer sur le support compact, en prenant la valeur négative. Ceci n'est guère surprenant car  $W$  étant une fonction lisse à support compact, le comportement devrait être le même que celui d'une dérivée faible.

En remarquant que :

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j^k} = \frac{x_{ji}^k}{r_{ij}} = -\frac{x_{ij}^k}{r_{ij}} = -\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i^k} \quad (2.1.25)$$

où  $r_{ij} = \|\underline{x}_{ij}\|_2$ , on obtient l'identité :

$$\frac{\partial W(\underline{x}_{ij}, h)}{\partial x_j^k} = \frac{x_{ji}^k}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}} = -\frac{x_{ij}^k}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}} = -\frac{\partial W(\underline{x}_{ij}, h)}{\partial x_i^k} \quad (2.1.26)$$

En utilisant (2.1.26), nous pouvons exprimer (2.1.24) sous la forme :

$$\left\langle \frac{\partial f^p(\underline{x}_i)}{\partial x_i^k} \right\rangle = \int_{B_{\underline{x}_i}} f^p(\underline{x}_j) \frac{x_{ij}^k}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}} d^2 \underline{x}_j \quad (2.1.27)$$

En prenant cette forme (2.1.27) comme inspiration, nous allons utiliser un développement de Taylor afin d'obtenir une approximation de lissage symétrique. Soit  $f$  un champ scalaire, vectoriel ou même tensoriel. Le développement de Taylor de  $f(\underline{x}_j)$  autour de  $\underline{x}_i$  est donné par :

$$f^p(\underline{x}_j) = f^p(\underline{x}_i) + \frac{\partial f^p(\underline{x}_i)}{\partial x_i^k} x_{ji}^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^p(\underline{x}_i)}{\partial x_i^l \partial x_i^k} x_{ji}^k x_{ji}^l + \dots \quad (2.1.28)$$

En multipliant le développement (2.1.28) par  $\frac{x_{ij}^k}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}}$  et en intégrant sur le support compact  $B_{\underline{x}_i}$ , on peut montrer [35], en utilisant la propriété de symétrie sphérique de  $W$ , que :

$$\left\langle \frac{\partial f^p(\underline{x}_i)}{\partial x_i^k} \right\rangle \approx \int_{B_{\underline{x}_i}} (f^p(\underline{x}_j) - f^p(\underline{x}_i)) \frac{x_{ij}^k}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}} d^2 \underline{x}_j \quad (2.1.29)$$

On a maintenant une approximation de lissage exhibant la propriété de symétrie qui nous intéresse. Finalement, on obtient l'approximation particulière (symétrique) de la dérivée première en utilisant la même approche que pour (2.1.4) :

$$\frac{\partial f_i^p}{\partial x^k} = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j f_{ji}^p \frac{x_{ij}^k}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.30)$$

Remarquons que nous avons enlevé le terme  $i$  de la sommation car, en utilisant la règle de l'Hôpital, nous pouvons montrer que ce terme est nul. De plus, l'inclure induit des problèmes numériques.

#### 2.1.4.2. Forme discrète de la dérivée seconde spatiale

En multipliant le développement (2.1.28) par  $\frac{x_{ij}^k x_{ij}^l}{r_{ij}^3} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}}$  puis en intégrant sur le support compact  $B_{\underline{x}_i}$ , il a été démontré par Sadek [35] que :

$$\left\langle \frac{\partial^2 f^p(\underline{x}_i)}{\partial x_i^k \partial x_i^l} \right\rangle \approx \int_{B_{\underline{x}_i}} (f^p(\underline{x}_i) - f^p(\underline{x}_j)) \frac{1}{r_{ij}} \left( 4 \frac{x_{ij}^k x_{ij}^l}{r_{ij}^2} - \delta^{kl} \right) \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r_{ij}} d^2 \underline{x}_j \quad (2.1.31)$$

Cette approximation de lissage possède elle aussi la propriété de symétrie. On discrétise de la même manière que lors de l'approximation de lissage de la dérivée première (2.1.30) :

$$\frac{\partial^2 f_i^p}{\partial x_i^k \partial x_i^l} = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j f_{ij}^p \frac{1}{r_{ij}} \left( 4 \frac{x_{ij}^k x_{ij}^l}{r_{ij}} - \delta^{kl} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.32)$$

En particulier, si nous contractons les indices dans (2.1.32), nous trouvons l'approximation discrète du laplacien :

$$\Delta f_i^p := \frac{\partial^2 f_i^p}{\partial x_i^k \partial x_i^k} = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} 2 \mathcal{A}_j f_{ij}^p \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.33)$$

### 2.1.5. Opérateurs utilisés

Pour résumer, dans le schéma PMIII (1.3.9), nous aurons besoin des approximations suivantes, déduites des formules discrètes trouvées précédemment.

$$\underline{\nabla} \phi_i = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j [\phi_j - \phi_i] \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.34a)$$

$$\Delta \phi_i = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} 2 \mathcal{A}_j [\phi_i - \phi_j] \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.34b)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j [\underline{u}_j - \underline{u}_i] \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.34c)$$

$$\Delta \underline{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} 2 \mathcal{A}_j [\underline{u}_i - \underline{u}_j] \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.1.34d)$$

Lors du traitement des conditions frontières, il sera parfois nécessaire de pouvoir calculer, par exemple, la matrice hessienne de  $\phi$  et le gradient de  $\underline{u}$ . Lorsque ce sera le cas, nous allons utiliser les formules (2.1.30) et (2.1.32). Ce détail est en fait la raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé la méthode habituelle [18, 29, 38] consistant à substituer, dans (2.1.24), la dérivation d'un quotient de fonction. En effet, il devient plus difficile d'y définir le hessien d'une fonction. De plus, cette méthode est plus adaptée aux situations où la densité n'est pas constante.

## 2.2. DISCRÉTISATION SPATIALE DU SCHÉMA PMIII

Nous pouvons maintenant entamer la première phase de discrétisation spatiale. Dans la même lignée que la première partie de ce chapitre, nous allons supposer que  $\Omega = \mathbb{R}^2$  afin d'éviter les problèmes près de la frontière. Dans ce qui suit, nous allons substituer les approximations discrètes (2.1.34) dans le schéma temporel PMIII adimensionné (1.3.9), que nous rappelons pour faciliter la lecture :

$$\underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i^* = \underline{u}_i^n + \Delta t \left[ \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.2.1a)$$

$$\Delta\phi_i^{n+1} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.1b)$$

$$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\text{Re}} \nabla \phi_i^{n+1} \quad (2.2.1c)$$

$$p_i^{n+\frac{1}{2}} = \phi_i^{n+1} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.1d)$$

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^{n+1} + \underline{u}_i^n) \quad (2.2.1e)$$

Notons que nous avons laissé tomber la notation étoilée, pour les variables adimensionnées.

### 2.2.1. Discrétisation spatiale

Soit  $\Delta t$ , un intervalle de temps et la notation  $t^n = n\Delta t$ . Soit  $i \in \Phi$  une particule de position initiale  $\xi_i$ , en  $t = 0$ . Nous allons utiliser les notations  $\underline{x}_i^n$ ,  $g_i^n$  pour désigner les valeurs approximatives de  $\underline{x}_i(t^n)$ ,  $g(\underline{x}_i(t^n), t^n)$ , où  $g: \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$  est une fonction quelconque. Aussi, nous allons utiliser les notations :

$$B_{\underline{x}_i}^n = \left\{ \underline{x}_j \in \Omega(t^n) \mid \|\underline{x}_i - \underline{x}_j\| \leq kh \right\} \quad (2.2.2)$$

$$\mathcal{B}_i^n = \left\{ j \in \Phi \mid \underline{x}_j^n \in B_{\underline{x}_i}^n \right\} \quad (2.2.3)$$

$$\mathcal{B}_i^{n,\prime} = \mathcal{B}_i^n \setminus \{i\} \quad (2.2.4)$$

pour désigner le support compact géométrique centré en  $\underline{x}$  dans le domaine  $\Omega(t^n)$  ainsi que le support compact matériel de  $i$  au temps  $n$ .

En premier lieu, nous allons discrétiser l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (2.2.1a). Connaissant  $\underline{u}^n$ , notre but est de calculer  $\underline{u}^*$ . On suppose que nous avons déjà calculé  $\Delta\underline{u}_i^n$ , à l'aide de (2.1.34d), au pas de temps précédent. En substituant l'approximation discrète du laplacien (2.1.34d) de  $\underline{u}_i^*$ , évaluée au pas  $n + 1$ , dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (2.2.1a), nous obtenons :

$$\underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{2 \text{Re}} \sum_{j \in \mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} 2\mathcal{A}_j^{n+1} (\underline{u}_i^* - \underline{u}_j^*) \frac{1}{r_{ij}^{n+1}} \frac{\partial W_{ij}^{n+1}}{\partial r_{ij}^{n+1}} = \underline{u}_i^n + \Delta t \left[ \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta\underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.2.5)$$

En posant :

$$a_{ij}^n = \frac{\Delta t}{\text{Re}} \frac{\mathcal{A}_j^n}{r_{ij}^n} \frac{\partial W_{ij}^n}{\partial r_{ij}^n} \quad (2.2.6)$$

En appliquant cette procédure à chacune des particules, nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\left( 1 - \sum_{j \in \mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} a_{ij}^{n+1} \right) \underline{u}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{B}_i^{n+1,\prime}} a_{ij}^{n+1} \underline{u}_j^* = \underline{u}_i^n + \Delta t \left[ \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta\underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.2.7)$$

En second lieu, nous allons discrétiser l'équation de Poisson (2.2.1b). Maintenant que nous connaissons  $\underline{u}^*$ , notre but est de calculer  $\phi^{n+1}$ . On suppose que nous avons déjà calculé

$\nabla \cdot \underline{u}_i^*$ , à l'aide de (2.1.34c), au pas précédent. En substituant l'approximation discrète du laplacien (2.1.34b) de  $\phi_i^{n+1}$  dans l'équation de Poisson (2.2.1b), nous obtenons :

$$\sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} 2\mathcal{A}_j^{n+1} (\phi_i^{n+1} - \phi_j^{n+1}) \frac{1}{r_{ij}^{n+1}} \frac{\partial W_{ij}^{n+1}}{\partial r_{ij}^{n+1}} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.8)$$

En appliquant cette procédure à chacune des particules, nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\left( \sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} a_{ij}^{n+1} \right) \phi_i^{n+1} - \sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} a_{ij}^{n+1} \phi_j^{n+1} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.9)$$

Finalement, après avoir calculé  $\nabla \phi_i^{n+1}$ , à l'aide de (2.1.34a), nous pouvons obtenir  $\underline{u}_i^{n+1}$ ,  $p_i^{n+\frac{1}{2}}$  et  $\underline{x}_i^{n+1}$  à l'aide des équations (2.2.1c), (2.2.1d) et (2.2.1e), respectivement.

Ainsi, nous obtenons le schéma de discrétisation PMIII temporel et spatial :

$$\left( 1 - \sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} a_{ij}^{n+1} \right) \underline{u}_i^* + \sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} a_{ij}^{n+1} \underline{u}_j^* = \underline{u}_i^n + \Delta t \left[ \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.2.10a)$$

$$\left( \sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} a_{ij}^{n+1} \right) \phi_i^{n+1} - \sum_{j \in B_i^{n+1, \prime}} a_{ij}^{n+1} \phi_j^{n+1} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.10b)$$

$$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\text{Re}} \nabla \phi_i^{n+1} \quad (2.2.10c)$$

$$p_i^{n+\frac{1}{2}} = \phi_i^{n+1} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.10d)$$

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}) \quad (2.2.10e)$$

### 2.2.2. Systèmes d'équations linéaires

Comme nous pouvons le remarquer, le calcul de la vitesse  $\underline{u}^*$  et de  $\phi^{n+1}$ , avec (2.2.10a) et (2.2.10b), se résume à résoudre les systèmes d'équations linéaires :

$$A \underline{u}^* = \underline{F} \quad \text{et} \quad B \underline{\phi}^{n+1} = \underline{G} \quad (2.2.11)$$

Ici,  $\underline{u}^*$  correspond au vecteur des couples  $\underline{u}_i^*$ , il s'agit donc d'une matrice à colonnes. Similairement,  $\underline{\phi}^{n+1}$  le vecteur des composantes  $\phi_i^{n+1}$ .

Rappelons qu'une matrice  $M$  est diagonale dominante (DD) si  $|M_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |M_{i,j}|$ ,  $\forall i$ . Si l'inégalité est stricte, alors on dit que  $M$  est diagonale dominante stricte (DDS). Du théorème de Levy–Desplanques, on sait qu'une matrice DDS est automatiquement non-singulière.

Si une matrice est DDS, symétrique et possède une diagonale strictement positive, alors elle est symétrique définie positive (SDP), c'est-à-dire qu'elle satisfait  $\underline{x}^T M \underline{x} > 0$ ,  $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ . Une matrice SDP admet une décomposition de Cholesky unique [14]. Si on admet des éléments diagonaux nuls et que la matrice est seulement DD, alors on dit que la matrice

est symétrique semi-définie positive (SSDP). Une matrice semi-définie positive admet aussi une décomposition de Cholesky. Par contre, cette décomposition n'est pas unique et est plus difficile à calculer que celle d'une matrice SDP.

Pour résoudre un système d'équations linéaires SDP, où bien SSDP, nous allons utiliser la méthode du gradient conjugué préconditionné, couplée à une décomposition incomplète de Cholesky pour obtenir la matrice de préconditionnement, qui permet de stabiliser et accélérer la résolution [18].

### 2.2.2.1. Résolution du système pour la vitesse auxiliaire

Rappelons que, pour chacune des particules  $i \in \Phi$ , on a l'équation :

$$\left(1 - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}\right) \underline{u}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \underline{u}_j^* = \underline{u}_i^n + \Delta t \left[ \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (2.2.12)$$

Afin d'alléger la notation, nous avons laissé tomber les indices temporels, non-nécessaire à la compréhension. Multiplions chacune de ces équations par  $\mathcal{A}_i$  :

$$\left(\mathcal{A}_i - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}\right) \underline{u}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \underline{u}_j^* = \mathcal{A}_i \left[ \underline{u}_i^n + \Delta t \left( \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (2.2.13)$$

Ainsi, nous pouvons réécrire ce système sous la forme :

$$A \underline{u}^* = \underline{F} \quad (2.2.14)$$

où, en posant :

$$\tilde{a}_{ij} = \mathcal{A}_i a_{ij} = \frac{\Delta t \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.2.15)$$

nous avons que  $A$  est la matrice creuse :

$$A_{i,j} = \begin{cases} \mathcal{A}_i - \sum_{k \in \mathcal{B}'_i} \tilde{a}_{ik} & \text{Si } i = j \\ \tilde{a}_{ij} & \text{Si } i \neq j \text{ et } j \in \mathcal{B}'_i \\ 0 & \text{Si } i \neq j \text{ et } j \notin \mathcal{B}'_i \end{cases} \quad (2.2.16)$$

et

$$\underline{F}_i = \mathcal{A}_i \left[ \underline{u}_i + \Delta t \left( \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i + \underline{f}_i \right) \right] \quad (2.2.17)$$

En utilisant les propriétés de  $W$ , nous pouvons montrer que  $\tilde{a}_{ij}$  et  $A$  possèdent les propriétés suivantes :

**Symétrie:**  $\forall i \in \Phi$ , on a  $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ ,  $\forall j \in \mathcal{B}'_i$ . Ainsi, nous avons  $A_{i,j} = A_{j,i}$ ,  $\forall i, j \in \Phi$ .

**Décroissance monotone:**  $\tilde{a}_{ij} < 0$ ,  $\forall j \in \mathcal{B}'_i$ . Par conséquent, nous avons  $\forall i \in \Phi$  que

$$A_{i,i} = 1 - \sum_{k \in \mathcal{B}'_i} \tilde{a}_{ik} > 0 \text{ et } A_{i,j} = \tilde{a}_{ij} < 0, \forall j \in \mathcal{B}'_i.$$

Avoir multiplié chacune des équations par  $\mathcal{A}_i$  nous a donc permis d'obtenir une matrice symétrique. De plus, on peut remarquer est  $A$  est DDS. En effet :

$$\sum_{j \neq i} |A_{i,j}| = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} |\tilde{a}_{ij}| = - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} a_{ij} < 1 - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} a_{ij}^{n+1} = A_{i,i} = |A_{i,i}| \quad (2.2.18)$$

Puisque la diagonale de  $A$  est strictement positive, on déduit que  $A$  est une matrice SDP [18]. Par conséquent, elle est non-singulière et le problème admet une unique solution. Pour cette raison, nous allons utiliser la méthode du gradient conjugué préconditionné couplée à une décomposition incomplète de Cholesky pour obtenir la matrice de préconditionnement, tel que spécifié précédemment.

### 2.2.2.2. Résolution du système pour la pression auxiliaire

Rappelons que, pour chacune des particules  $i \in \Phi$ , on a l'équation :

$$\left( \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \right) \phi_i^{n+1} - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \phi_j^{n+1} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.19)$$

Afin d'alléger la notation, nous avons de nouveau laissé tomber les indices temporels, non-nécessaire à la compréhension. Multiplions chacune de ces équations par  $-\mathcal{A}_i$  :

$$- \left( \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \right) \phi_i^{n+1} + \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \frac{\Delta t \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{\text{Re } r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \phi_j^{n+1} = -\frac{\mathcal{A}_i}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.20)$$

Nous pouvons réécrire ce système sous la forme :

$$B \phi^{n+1} = G \quad (2.2.21)$$

où, nous avons que  $B$  est la matrice creuse :

$$B_{i,j} = \begin{cases} - \sum_{k \in \mathcal{B}'_i} \tilde{a}_{ik} & \text{Si } i = j \\ \tilde{a}_{ij} & \text{Si } i \neq j \text{ et } j \in \mathcal{B}'_i \\ 0 & \text{Si } i \neq j \text{ et } j \notin \mathcal{B}'_i \end{cases} \quad (2.2.22)$$

et

$$G_i = -\frac{\mathcal{A}_i}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.23)$$

En utilisant les propriétés de  $W$ , nous pouvons montrer que  $\tilde{a}_{ij}$  et  $B$  possèdent les propriétés suivantes :

**Symétrie:**  $\forall i \in \Phi$ , on a  $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ ,  $\forall j \in \mathcal{B}'_i$ . Ainsi, nous avons  $B_{i,j} = B_{j,i}$ ,  $\forall i, j \in \Phi$ .

**Décroissance monotone:**  $\tilde{a}_{ij} < 0$ ,  $\forall j \in \mathcal{B}'_i$ . Par conséquent, nous avons  $\forall i \in \Phi$  que

$$B_{i,i} = - \sum_{k \in \mathcal{B}'_i} \tilde{a}_{ik} > 0 \text{ et } B_{i,j} = \tilde{a}_{ij} < 0, \forall j \in \mathcal{B}'_i.$$

Multiplier chacune des équations par  $-\mathcal{A}_i$  nous a donc permis d'obtenir une matrice symétrique avec des termes diagonaux strictement positifs [18]. Par contre,  $B$  est seulement DD :

$$\sum_{j \neq i} |B_{i,j}| = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} |\tilde{a}_{ij}| = - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} a_{ij} = B_{i,i} = |B_{i,i}| \quad (2.2.24)$$

Par conséquent  $B$  est seulement SSDP et peut donc être singulière. On observe qu'en additionnant toutes les colonnes, ou lignes, de  $B$  on obtient le vecteur nul. Ainsi,  $B$  est bel et bien une matrice singulière et la résolution dépendra des conditions aux limites.

Dans le cas où une partie de la frontière possède une condition de Dirichlet, alors le problème sera bien posé et la contribution de la condition de Dirichlet rendra la matrice non-singulière.

Dans celui où nous devons résoudre un problème aux limites de Neumann homogène  $\nabla \phi \cdot \hat{n} = 0$  partout sur la frontière, le système admet une solution si et seulement si la **contrainte de compatibilité discrète** suivante est satisfaite [11, 12] :

$$\sum_{i \in \Phi} G_i = 0 \iff \sum_{i \in \Phi} \mathcal{A}_i \nabla \cdot \underline{u}_i^* = 0 \quad (2.2.25)$$

Lorsque la condition de compatibilité sera satisfaite, nous allons rendre la matrice  $B$  inversible en ajoutant 1 à un élément de la diagonale [18]. Ceci aura pour effet de fixer la valeur de  $\phi$  sur cette particule. Ensuite, nous allons résoudre en utilisant la méthode du gradient conjugué préconditionné couplée à une décomposition incomplète de Cholesky pour obtenir la matrice de préconditionnement.

En utilisant l'approximation discrète de l'opérateur de la divergence (2.1.34c), on obtient en substituant dans (2.2.25) :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Phi} \mathcal{A}_i \nabla \cdot \underline{u}_i^* &= \sum_{i \in \Phi} \mathcal{A}_i \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j [\underline{u}_j^* - \underline{u}_i^*] \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j [\underline{u}_j^* - \underline{u}_i^*] \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} - \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_i^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} - \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ji}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} + \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= 2 \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Puisque  $\mathcal{A}_i > 0, \forall i \in \Phi$ , nous ne pouvons pas forcer directement la contrainte de compatibilité (2.2.25) en contrôlant l'aire attribuée à nos particules. Par contre, si nous soustrayons

de chaque  $G_i$  la moyenne  $\frac{1}{|\Phi|} \sum_{i \in \Phi} G_i$  :

$$G'_i = G_i - \frac{1}{|\Phi|} \sum_{i \in \Phi} G_i \quad (2.2.27)$$

et puisque cette transformation ne change pas  $B$ , car la somme de ses lignes est nulle, nous obtenons le nouveau système  $B\phi = \underline{G}'$  qui satisfait la condition de compatibilité [11] :

$$\sum_{i \in \Phi} G'_i = \sum_{i \in \Phi} \left[ G_i - \frac{1}{|\Phi|} \sum_{j \in \Phi} G_j \right] = \sum_{i \in \Phi} G_i - |\Phi| \frac{1}{|\Phi|} \sum_{j \in \Phi} G_j = 0 \quad (2.2.28)$$

En fait, il est possible d'éviter ce problème en utilisant une approximation de l'opérateur de la divergence qui satisfait la conservation de la masse [11, 29] :

$$\nabla \cdot \underline{u}_i^* = \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j \left[ \underline{u}_i^* + \underline{u}_j^* \right] \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.2.29)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Phi} \mathcal{A}_i \nabla \cdot \underline{u}_i^* &= \sum_{i \in \Phi} \mathcal{A}_i \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \mathcal{A}_j \left[ \underline{u}_i^* + \underline{u}_j^* \right] \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \left[ \underline{u}_i^* + \underline{u}_j^* \right] \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_i^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} + \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_j^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_i^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} + \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i \underline{u}_i^* \cdot \frac{\underline{x}_{ji}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_i^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} - \sum_{i,j \in \Phi} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \underline{u}_i^* \cdot \frac{\underline{x}_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Ainsi, la discrétisation (2.2.29) satisfait automatiquement la condition de compatibilité. Remarquons que ceci est aussi dû au fait que nous avons multiplié nos équations par  $\mathcal{A}_i$ . Dans le cas contraire, il faut imposer que  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j, \forall i, j \in \Phi$ .

### 2.2.3. Schéma de discrétisation symétrique PMIII

Pour résumer, en considérant les ajustements pour obtenir des systèmes d'équations symétriques, nous obtenons la version symétrique du schéma de discrétisation PMIII temporel et spatial :

$$\left( \mathcal{A}_i - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \tilde{a}_{ij} \right) \underline{u}_i^* + \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \tilde{a}_{ij} \underline{u}_j^* = \mathcal{A}_i \left[ \underline{u}_i^n + \Delta t \left( \frac{1}{2 \text{Re}} \Delta \underline{u}_i^n + \underline{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (2.2.31a)$$

$$- \left( \sum_{j \in B'_i} \tilde{a}_{ij} \right) \phi_i^{n+1} + \sum_{j \in B'_i} \tilde{a}_{ij} \phi_j^{n+1} = - \frac{\mathcal{A}_i}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.31b)$$

$$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\text{Re}} \nabla \phi_i^{n+1} \quad (2.2.31c)$$

$$p_i^{n+\frac{1}{2}} = \phi_i^{n+1} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{u}_i^* \quad (2.2.31d)$$

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}) \quad (2.2.31e)$$

où :

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\Delta t}{\text{Re}} \frac{\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} \quad (2.2.32)$$

# Chapitre 3

---

## TRAITEMENT DES FRONTIÈRES

Lors d'un calcul SPH près d'une frontière, un vide de particule nuit aux approximations, causant ainsi une accumulation d'erreurs qui vient tromper les résultats. La méthode que nous allons utiliser pour contrer ce problème va différer en fonction de la famille de frontières rencontrée.

La première famille est celle des **frontières physiques**, c'est-à-dire les frontières qui apparaissent naturellement dans la description du problème physique. Il peut s'agir, par exemple, des endroits où le fluide rencontre une paroi solide, d'une surface libre séparant le fluide d'un gaz où bien, plus généralement, d'une interface entre deux milieux différents. Il s'agit donc de frontières séparant le fluide d'intérêt des autres milieux, c'est-à-dire, de son extérieur.

La seconde famille est constituée des **frontières artificielles**. Ces frontières apparaissent lorsque nous tentons de borner artificiellement le domaine afin de pouvoir le traiter numériquement. Par exemple, lorsque nous imposons une condition d'entrée ou bien périodique. Aussi, nous pourrions vouloir profiter de la symétrie d'un domaine et le séparer en deux à l'aide de la ligne de symétrie, qui sera maintenant considérée comme une frontière. Il s'agit donc de frontières apparaissant à l'intérieur du **domaine physique**, le domaine où le problème physique est originellement décrit, permettant de le traiter numériquement. Notons que nous allons appeler **domaine de résolution** le domaine sur lequel nous allons résoudre numériquement. Il y aura une différence entre le domaine physique et le domaine de résolution lorsqu'il y aura des frontières artificielles. En fait, le domaine de résolution sera, en général, un sous-ensemble du domaine physique.

### 3.1. NOTATIONS

Nous allons noter par  $\Phi$  l'ensemble d'indices des particules situées dans le domaine physique  $\Omega$  et par  $\Psi$  l'ensemble d'indices des marqueurs situés sur la frontière  $\Gamma$ . Puisque nous allons considérer les particules près de la frontière, c'est-à-dire à une distance de  $\Gamma$  inférieure

au rayon du support compact, supposé constant pour toutes les particules, nous allons dénoter cet ensemble de particules par  $\mathcal{N}$ . Les méthodes présentées plus bas, voir la figure 3.1, consisteront en la création de **particules imaginaires** associées aux particules de  $\mathcal{N}$  et aux marqueurs de  $\Psi$ . Ainsi, nous allons définir  $\mathcal{I}'$ , l'ensemble des particules imaginaires.

Aussi, nous allons voir que chacune des particules imaginaires aura été créée à l'aide d'une unique **particule physique mère**  $i \in \Phi$  et d'un unique **marqueur frontière mère**  $i_b \in \Psi$ . Par conséquent, nous allons dénoter les particules imaginaires par  $i'_b \in \mathcal{I}'$ . Ainsi,  $i'_b$  contiendra l'information de ses parents dans sa notation. En effet, à chacune des particules imaginaires  $i'_b$  correspondra un **doublet**  $\{i, i_b\}$ .

Finalement, nous allons noter par  $\mathcal{I}_{pm}$  la liste des indices des particules mères et par  $\mathcal{I}_{bm}$  la liste des indices des marqueurs frontières associés à toutes les particules imaginaires  $\mathcal{I}'$ . Remarquons que  $\mathcal{I}_{pm}, \mathcal{I}_{bm}$  doivent être ordonnées de la même manière que  $\mathcal{I}'$ .

## 3.2. FRONTIÈRE PHYSIQUE

Soit  $\Omega$  le domaine physique et supposons, pour le moment, que la frontière  $\Gamma$  est de type naturel. Ainsi,  $\Omega$  sera aussi le domaine de résolution. Pour résoudre le problème de vide de particule dans le support compact près d'une frontière physique  $\Gamma$  ainsi que celui de l'application des conditions frontières, nous allons employer deux méthodes selon la courbure de  $\Gamma$ . Les deux méthodes reposent, fondamentalement, sur le même principe : pour combler le vide de particule et appliquer les conditions aux limites, nous allons créer des particules imaginaires à l'extérieur du domaine. Les valeurs attribuées aux variables primitives de ces nouvelles particules auront pour but de simuler les conditions aux limites désirées. Lorsque la frontière sera de courbure nulle, c'est-à-dire, fait de segment de droite, nous allons employer la **méthode des particules imaginaires** (IP) [6, 11, 19, 25, 32, 38]. Lorsqu'elle sera courbée en certains endroits, nous appliquerons une variation de la **méthode des tangentes multiples à la frontière** (MBT)[35, 37, 40, 43].

### 3.2.1. Méthode des particules imaginaires (IP)

Ici, nous étudions le cas simplifié où la frontière est une droite. Cette méthode consiste en la création de particules imaginaires à l'extérieur de  $\Omega$  en prenant la frontière  $\Gamma$  comme ligne de symétrie. Pour se faire, nous allons prendre les particules situées dans  $\Omega$  suffisamment près de  $\Gamma$ , c'est-à-dire à une distance inférieure au rayon du support compact, et créer de nouvelles particules qui seront leurs images symétriques, par rapport à  $\Gamma$ . Ensuite, nous donnerons des valeurs spécifiques à leurs champs pour satisfaire les conditions frontières lorsque nous ferons un calcul SPH.

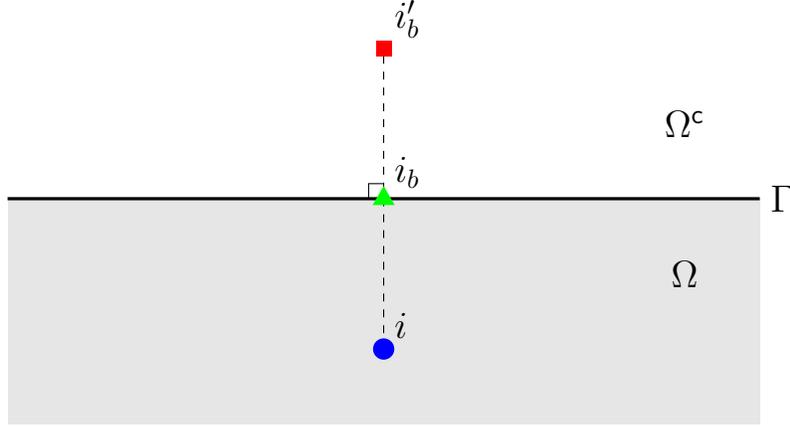


FIGURE 3.1. Méthode des particules imaginaires

Voici l'algorithme permettant l'implémentation de la méthode IB :

**Étape 1:**  $\forall i \in \mathcal{N}$ , nous créons un marqueur frontière  $i_b \in \Psi$  correspondant à la projection orthogonale de  $i$  sur  $\Gamma$ .

**Étape 2:**  $\forall i \in \mathcal{N}$  nous créons une particule image  $i'_b \in \mathcal{I}'$  tel que :

- $i'_b$  est l'image symétrique de  $i$ , par rapport à  $\Gamma$  ;
- $i'_b$  possède la même aire que  $i$ , c'est-à-dire, que  $\mathcal{A}_{i'_b} = \mathcal{A}_i$  ;
- les conditions frontières à imposer, pour définir les variables primitives de  $i'_b$ , seront celles de  $i_b$ .

Une alternative à l'étape 1, moins coûteuse, pourrait être de créer préalablement un ensemble  $\Psi$  de marqueurs équidistants sur la frontière  $\Gamma$  et d'associer aux particules  $i \in \mathcal{N}$  leurs plus proches voisins  $i_b \in \Psi$  :

**Étape 1':**  $\forall i \in \mathcal{N}$ , nous trouvons le marqueur frontière  $i_b \in \Psi$  étant le plus proche voisin.

### 3.2.2. Méthode des tangentes multiples à la frontière (MBT)

Ici, nous étudions le cas où  $\Gamma$  est une courbe lisse dans l'espace. Encore une fois, nous désirons combler le vide de particule à l'extérieur du domaine, tout en satisfaisant les conditions imposées sur la frontière, en ajoutant des particules imaginaires à l'extérieur de notre domaine. Pour ce faire, nous allons créer des marqueurs sur  $\Gamma$  et trouver la droite tangente à  $\Gamma$  en chacune de ces positions pour finalement appliquer successivement la méthode des particules imaginaires. Par la suite, il suffira de bien choisir, parmi toutes ces particules imaginaires, lesquelles incorporer dans le voisinage des particules de notre domaine. Aussi, puisque cette méthode génère beaucoup de particules imaginaires, il faudra judicieusement pondérer l'aire que nous allons leur attribuer.

Nous allons maintenant présenter l'algorithme permettant l'implémentation de la méthode MBT. Aussi, nous allons accompagner la description d'un exemple. Par contre, nous avons choisi de donner des étiquettes  $\{a,b,c,d\}$  aux marqueurs frontières et non  $\{i_a,i_b,i_c,i_d\}$  afin de ne pas alourdir les figures inutilement.

**Étape 1:** Nous trouvons les droites tangentes passant par tous les marqueurs  $i_b \in \Psi$ . Ceci ce fait en prenant la droite, passant par  $i_b$ , parallèle à la sécante passant par ses voisins immédiats  $i_{b-1}$  et  $i_{b+1}$ .

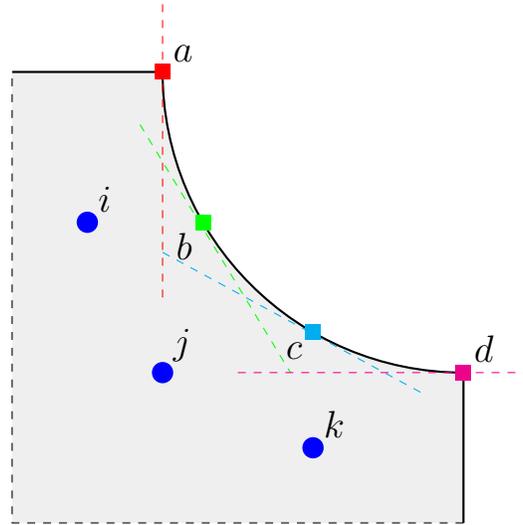


FIGURE 3.2. Étape 1 : Droites tangentes des marqueurs frontières

**Étape 2:**  $\forall i \in \mathcal{N}$ , nous trouvons le voisinage  $\mathcal{B}_{i,\Psi}$  de  $i$  dans  $\Psi$ .

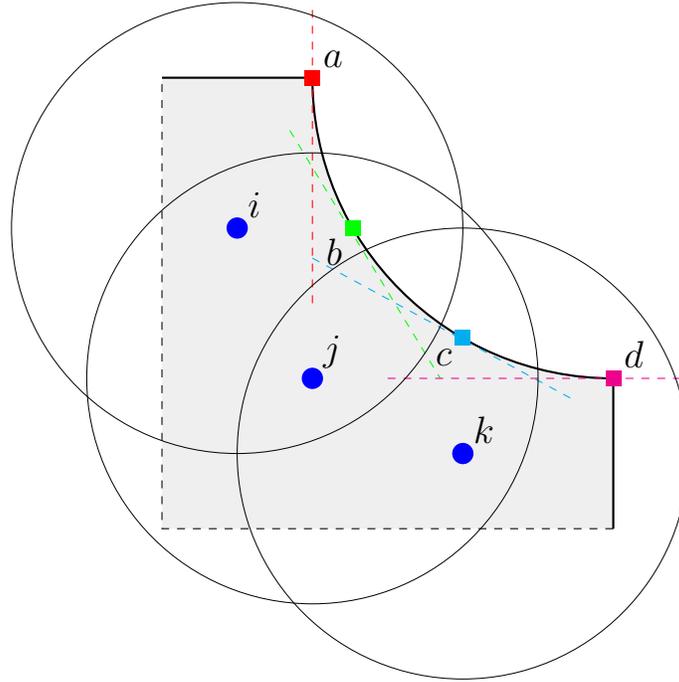


FIGURE 3.3. Étape 2 : Recherche des marqueurs frontières voisins. Ici,  $\mathcal{B}_{i,\Psi} = \{a,b\}$ ,  $\mathcal{B}_{j,\Psi} = \{b,c\}$  et  $\mathcal{B}_{k,\Psi} = \{c,d\}$

- Étape 3:**  $\forall i \in \mathcal{N}$  et  $\forall i_b \in \mathcal{B}_{i,\Psi}$ , nous créons une particule imaginaire  $i'_b \in \mathcal{I}'$  telle que :
- $i'_b$  est l'image symétrique de  $i$ , par rapport à la droite tangente associée à  $i_b$ ;
  - $i'_b$  possède la même aire que  $i$ , c'est-à-dire, que  $\mathcal{A}_{i'_b} = \mathcal{A}_i$ ;
  - les conditions frontières à imposer, pour définir les variables primitives de  $i'_b$ , seront celles de  $i_b$ .

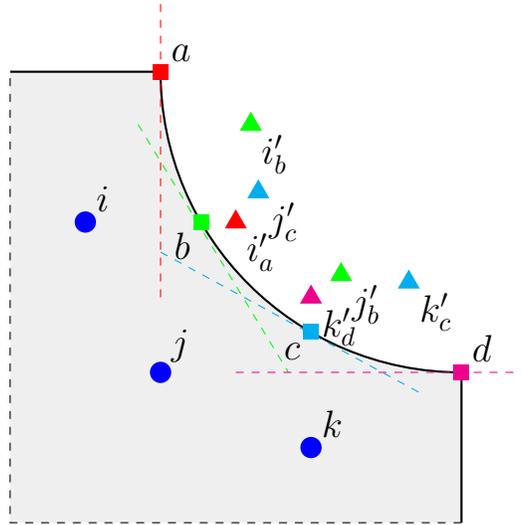


FIGURE 3.4. Étape 3 : Création des particules imaginaires. Ici, les particules imaginaires associées à la particule  $i$  et aux marqueurs  $a$  et  $b$  sont, respectivement,  $i'_a$  et  $i'_b$

- Étape 4:** Soit  $x_p \in \Omega$  une position dont nous voulons trouver le voisinage dans  $\mathcal{I}'$ . Nous allons ajouter  $i'_b \in \mathcal{B}_{p,\mathcal{I}'}$  si  $i'_b$  satisfait les conditions suivantes :
- $i'_b$  doit se trouver à l'intérieur du support compact de  $p$ ;
  - $i$  devrait se trouver à distance d'influence de  $p$ , c'est-à-dire  $i \in \mathcal{B}_{p,\Phi}$ ;
  - $i_b$  devrait se trouver à distance d'influence de  $p$ , c'est-à-dire  $i_b \in \mathcal{B}_{p,\Psi}$ ;
  - $i'_b$  ne devrait pas être située à l'intérieur de  $\Omega$ .

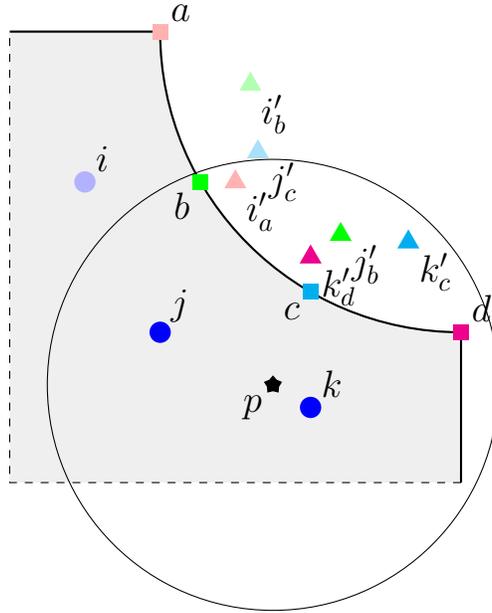


FIGURE 3.5. Étape 4 : Recherche du voisinage imaginaire d'une particule d'intérêt. Ici,  $\mathcal{B}_{p,\mathcal{I}'} = \{j'_b, k'_c, k'_d\}$

**Étape 5:** Soit  $\underline{x}_p \in \Omega$ .  $\forall i'_b \in \mathcal{B}_{p,\mathcal{I}'}$  nous comptons le nombre de répétitions  $\#_p i'_b$  de  $i \in \mathcal{B}_{p,\mathcal{I}_{pm}}$ , c'est-à-dire le nombre de particule images dans le voisinage de  $p$  possédant la même particule mère  $i$  que  $i'_b$ . Ainsi, nous définissons la pondération  $\alpha_{p,i'_b} = \frac{1}{\#_p i'_b}$ .

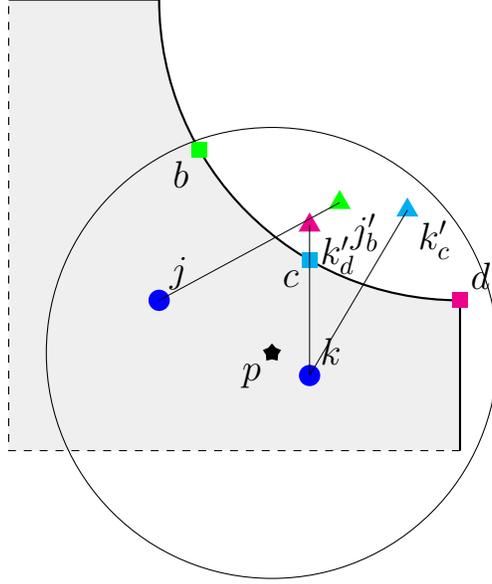


FIGURE 3.6. Étape 5 : Recherche de particules imaginaires jumelles dans le voisinage d'une particule d'intérêt. Ici,  $k'_c$  et  $k'_d$  sont jumelles par rapport à  $p$ . Ainsi,  $\#_p k'_c = \#_p k'_d = 2$  et  $\#_p j'_b = 1$

**Étape 6:** Lors des calculs SPH autour d'une particule d'intérêt  $p$ , nous allons pondérer l'aire des particules imaginaires  $i'_b \in \mathcal{B}_{p,\mathcal{I}'}$  par  $\alpha_{p,i'_b}$ . Ainsi, on définit :

$$\mathcal{A}_{p,i'_b} := \alpha_{p,i'_b} \mathcal{A}_{i'_b} = \alpha_{p,i'_b} \mathcal{A}_i \quad (3.2.1)$$

Ainsi, l'**aire effective** d'une particule imaginaire dépend du voisinage dans lequel le calcul se fait.

Remarquons que, lorsque la frontière est droite, les particules imaginaires jumelles occupent la même position et la pondération fait en sorte que leurs contributions sont équivalentes, lorsque la condition aux limites ne dépend pas de la position sur la frontière, à la contribution d'une unique particule imaginaire. Par conséquent, on observe que la méthode MBT est, en quelque sorte, une généralisation de la méthode IP.

### 3.2.3. Méthode des tangentes multiples à la frontière lissée (SMBT)

Nous allons maintenant modifier l'étape 5 de la méthode MBT :

**Étape 5'**: Soit  $\underline{x}_p \in \Omega$ .  $\forall i'_b \in \mathcal{B}_{p,\mathcal{I}'}$  nous définissons la pondération

$$\alpha_{p,i'_b} = \frac{W(pi'_b, h)}{\sum_{\substack{j \in \mathcal{B}_{p,\mathcal{I}pm} \\ j=i}} W(pj'_b, h)} \quad (3.2.2)$$

où,  $pi'_b$  réfère à la distance  $r_{pi'_b}$ , entre  $p$  et  $i'_b$ . Ici, la somme est fait sur les **particules imaginaires jumelles** de la particule imaginaire  $i'_b$  dans le voisinage de  $p$ . Par particules imaginaires jumelles, nous sous-entendons celles issues de la même particule physique mère et étant dans le voisinage de  $p$ , voir la figure 3.6 de l'étape 5.

Nous avons décidé d'utiliser cette pondération pour que, lorsqu'une particule d'intérêt longe  $\Gamma$ , il n'y ait pas de saut dans la contribution des particules imaginaires. En effet, avec la pondération originale, lorsqu'une nouvelle particule jumelle s'intégrait au voisinage d'une particule d'intérêt, l'aire de ses sœurs se voyait abruptement réduite. Ceci peut être problématique, car lorsqu'une particule est sur la frontière du support compact, sa contribution n'est pas immédiatement sentie, car la fonction de lissage  $y$  est nulle.

Par contre, notre nouvelle pondération tire profit du fait que  $W$  est une fonction lisse pour faire varier l'aire des particules imaginaires de manière continue. De plus, cette pondération a pour effet de donner plus d'importance aux particules imaginaires les plus proches de la particule d'intérêt.

### 3.3. FRONTIÈRE ARTIFICIELLE

#### 3.3.1. Frontières Périodiques

Dans le problème d'écoulement de Poiseuille, nous devons simuler un écoulement dans un tuyau bidimensionnel infini. Étant donné qu'il s'agit d'un écoulement dont le champ de vitesse et la pression dynamique sont invariants par translation dans la longueur du tuyau [6, 32], ce problème est équivalent à la résolution du même écoulement dans un tore, c'est-à-dire dans une bande périodique de longueur finie et de même largeur.

Nous avons donc, comme domaine de résolution, une bande de longueur finie dont l'entrée est identifiée à la sortie et vice versa. Ainsi, pour appliquer cette condition de périodicité sur les quantités étudiées et palier au vide de particules, nous allons, pour l'entrée, copier une bande de particules situées à une distance inférieure à la largeur du rayon du support compact de la sortie et la coller à l'entrée. Il en est de même pour la sortie, mais maintenant en copiant une bande provenant de l'entrée.

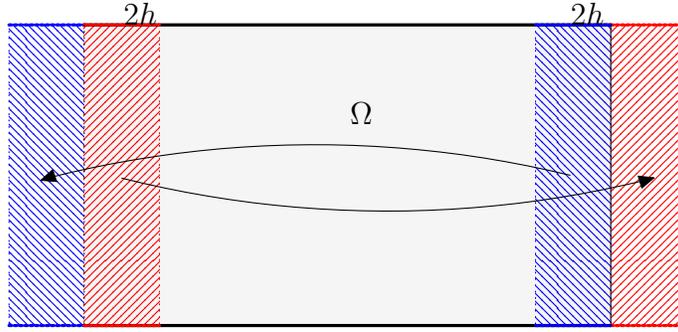


FIGURE 3.7. Frontières périodiques

### 3.3.2. Frontière d'entrée

Dans le problème d'extrusion, nous avons un fluide, provenant d'un tuyau semi-infini, qui s'écoule à la sortie du tuyau. Cet écoulement sera généré par un profil de Poiseuille stationnaire à l'entrée du tuyau, c'est-à-dire, à une distance infinie de la sortie.

Puisque, nous nous attendons à ce que les perturbations causées par le saut de pression à la sortie du tuyau n'aient pas beaucoup d'influence à l'intérieur du tuyau [10, 35], nous allons supposer qu'à une distance finie, mais suffisamment grande, de la sortie, c'est le profil de Poiseuille qui va dominer sur l'écoulement. Ainsi, nous allons fixer une position dans le tuyau, suffisamment loin de la sortie, et allons y mettre une frontière d'entrée. Pour appliquer un profil de Poiseuille sur cette frontière et palier au vide de particules, nous allons coller à cette entrée une bande de particules, dont la largeur est celle du rayon du support compact, qui se déplace selon un écoulement de Poiseuille analytique. De plus, l'écoulement sera périodique sur cette bande. Lorsque l'une de ces particules sera sur le point de franchir la frontière d'entrée, elle sera dupliquée. Le clone s'ajoutera au domaine de résolution, tandis que l'original va continuer de se déplacer périodiquement sur cette bande. Ceci va nous permettre de nourrir le domaine en particules au fur et à mesure que les autres avancent, et donc, s'éloignent de l'entrée.

Notons, qu'une alternative plus simple, viable dans les simulations de courtes durées, est de faire avancer la bande de particules de manière non périodique, c'est-à-dire comme un front. Par contre, avec cette méthode, l'entrée doit initialement se trouver suffisamment loin de la sortie, afin d'en rester suffisamment loin tout au long de la simulation. Ceci, demande une quantité initiale de particules plus grandes que la méthode du *tapis périodique*. Par contre, elle est beaucoup plus simple à programmer. Puisque nos simulations vont rester grossières, nous allons préférer cette méthode à l'alternative.

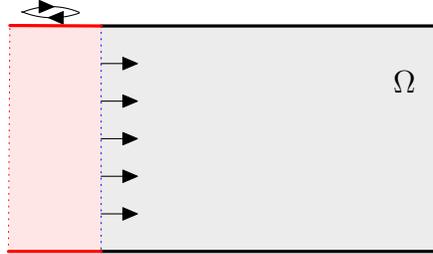


FIGURE 3.8. Frontière d'entrée

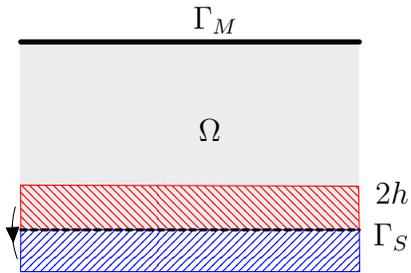


FIGURE 3.9. Frontière symétrique

### 3.3.3. Frontière symétrique

Étant donné que la méthode SPH devient rapidement très gourmande en calcul, par exemple lors de la recherche de voisins, il peut s'avérer intéressant de profiter des symétries du problème pour réduire la taille du domaine de résolution. Pour ce faire, nous allons couper le domaine sur la ligne de symétrie et garder seulement l'un des deux côtés. Ensuite, nous allons créer des particules miroirs, à partir des particules situées suffisamment près de la ligne de symétrie. Les particules miroirs seront identifiées aux particules dans le domaine de résolution les ayant créées. Finalement, les valeurs attribuées à leurs champs dépendront du comportement de ce champ autour de la ligne de symétrie. Nous en discuterons, plus en détail, dans la section 3.4.5.

### 3.3.4. Combinaison de frontières physiques et artificielles

Notons que nous allons prolonger les frontières physiques, de manière consistante, lorsqu'elles seront coupées par les frontières artificielles. Ainsi, puisque les particules créées par les frontières artificielles, bien que hors du domaine de résolution, sont des particules situées à l'intérieur du domaine physique, elles vont créer des particules imaginaires à l'aide

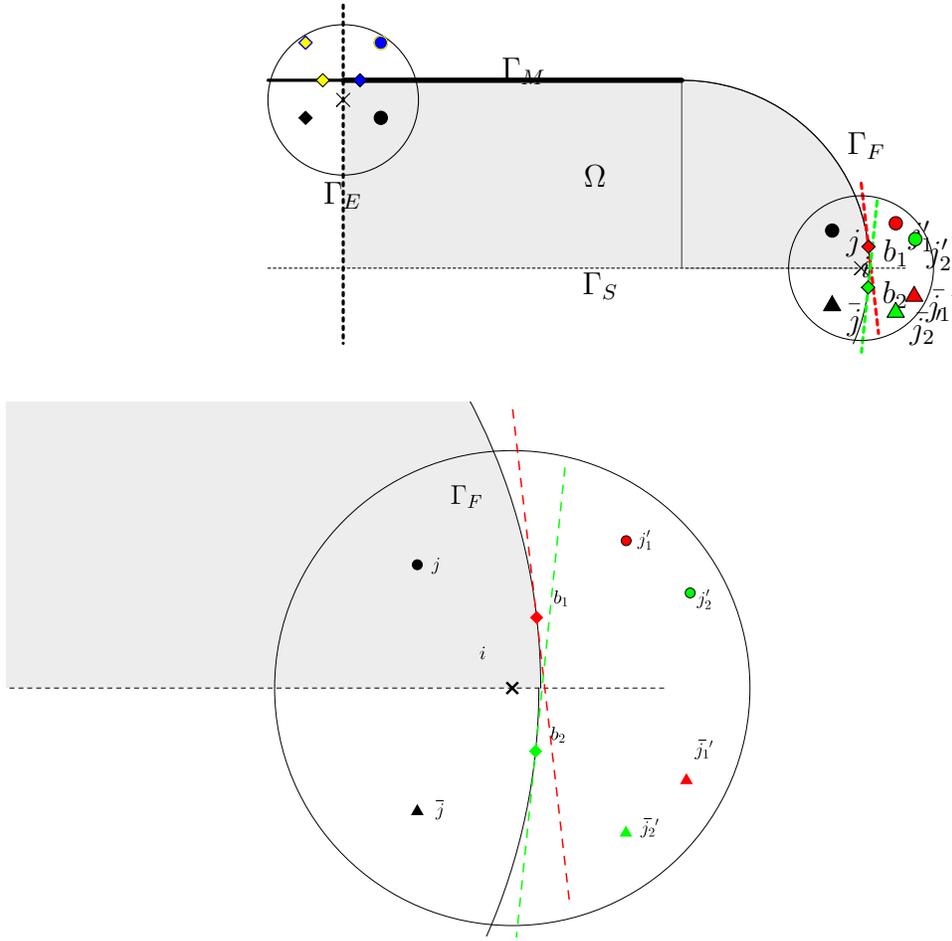


FIGURE 3.10. Combinaison de frontières artificielles et physiques

le la prolongation des frontières physiques. De plus, les particules artificielles, n'étant pas des particules imaginaires, ne seront pas prises en compte lors du calcul des pondérations, et ce, même lorsqu'elles seront créées à partir des particules du domaine de résolution. Par exemple, une particule symétrique  $\bar{j}$  qui crée une particule image  $\bar{j}'$ , ne sera pas considérée comme l'une de ses particules jumelles, mais plutôt comme sa particule mère, voir la figure 3.10.

### 3.4. CONDITIONS AUX LIMITES

Dans la section précédente, nous avons discuté des moyens que nous allons employer pour combler le vide de particules hors du domaine. Nous allons maintenant discuter de la manière appropriée d'appliquer les conditions aux limites lorsque nous calculons des approximations particulières près de la frontière. Pour ce faire, nous allons utiliser la même approche que [11, 18], utilisant le concept d'extrapolation linéaire et de différence centrée autour de la frontière pour attribuer des valeurs aux champs des particules imaginaires.

Dans ce qui suit, nous allons supposer que la frontière est fermée et orientée dans le sens positif. Ainsi, nous allons définir  $\hat{n}$  le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière et  $\hat{t}$  le vecteur tangent unitaire à la surface. Notons que  $\hat{t}$  pointe dans la direction de l'orientation.

### 3.4.1. Condition de Dirichlet

Soit  $f$  une fonction scalaire sur le domaine  $\Omega$  et  $g$  une fonction scalaire sur la frontière  $\Gamma_D$ . Une **condition aux limites de type Dirichlet** sur  $f$  est une condition qui fixe les valeurs de  $f$  sur la frontière :

$$f(\underline{x}) = g(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (\text{Condition de Dirichlet}) \quad (3.4.1)$$

Soit  $i'_b$  une particule imaginaire, obtenue de la méthode IP 3.2.2 ou bien MBT 3.2.2, et son doublet associé  $\{i, i_b\}$ . Par extrapolation linéaire, nous obtenons la valeur à imposer à la particule imaginaire  $i'_b$  :

$$f_{i'_b} = 2g_{i_b} - f_i \quad (3.4.2)$$

On peut généraliser pour un champ vectoriel ou bien tensoriel en le traitant composante par composante. Par exemple, pour un problème de Dirichlet, avec  $\underline{f}$  et  $\underline{g}$  des champs vectoriels :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (3.4.3)$$

nous obtenons la valeur à imposer à la particule imaginaire  $i'_b$  :

$$\underline{f}_{i'_b} = 2\underline{g}_{i_b} - \underline{f}_i \quad (3.4.4)$$

### 3.4.2. Condition de Neumann

Soit  $f$  une fonction scalaire sur le domaine  $\Omega$  et  $h$  une fonction scalaire sur la frontière  $\Gamma_N$ . Une **condition aux limites de type Neumann** sur  $f$  est une condition qui fixe les dérivées normales  $f$  sur la frontière :

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \hat{n}} = h(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (\text{Condition de Neumann}) \quad (3.4.5)$$

où  $\frac{\partial}{\partial \hat{n}} := \hat{n} \cdot \nabla$  est la dérivée dans la direction du vecteur normal. Soit  $i'_b$  une particule imaginaire, obtenue de la méthode IP 3.2.2 ou bien MBT 3.2.2, et son doublet associé  $\{i, i_b\}$ . Par différence centrée autour de  $i_b$  dans la direction normale, nous obtenons la valeur à imposer à la particule imaginaire  $i'_b$  :

$$f_{i'_b} = 2r_{ii_b} h_{i_b} + f_i \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (3.4.6)$$

où  $r_{ii_b} = \|\underline{x}_i - \underline{x}_{i_b}\|_2$ . On peut généraliser pour un champ vectoriel ou bien tensoriel en le traitant composante par composante. Par exemple, pour un problème de Neumann, avec  $\underline{f}$  et  $\underline{h}$  des champs vectoriels :

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{h}(\underline{x}) \quad (3.4.7)$$

nous obtenons la valeur à imposer à la particule imaginaire  $i'_b$  :

$$\underline{f}_{i'_b} = 2r_{i'_b} \underline{h}_{i'_b} + \underline{f}_i \quad (3.4.8)$$

### 3.4.3. $\Gamma_M$ : Paroi solide

Ce type de condition apparait lorsque le fluide rencontre une paroi solide en  $\Gamma_M$ . Supposons que l'obstacle soit immobile. Alors, nous avons, respectivement, les conditions de non-pénétration et de non-dérapiage sur le champ de vitesse  $\underline{u}$  au temps  $t = (n+1)\Delta t$  :

$$\underline{u}^{n+1} \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (\text{Condition de non-pénétration}) \quad (3.4.9a)$$

$$\underline{u}^{n+1} \cdot \hat{t} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (\text{Condition de non-dérapiage}) \quad (3.4.9b)$$

c'est-à-dire,

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (3.4.10)$$

Nous obtenons ainsi une condition de Dirichlet homogène pour  $\underline{u}^{n+1}$ .

Pour ce qui est des champs auxiliaires  $\underline{u}^*$  et  $\phi^{n+1}$ , apparaissant dans le schéma PMIII (2.2.31), nous allons d'abord imposer la condition de parallélisme sur  $\underline{u}^*$ , mentionnée dans le théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge 1.2.1, qui s'exprime comme :

$$\underline{u}^* \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (3.4.11)$$

En substituant (3.4.10) et (3.4.11) dans la décomposition (2.2.31c), ceci induit une condition de Neumann pour  $\phi^{n+1}$  :

$$\nabla \phi^{n+1} \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (3.4.12)$$

Finalement, de (3.4.10) et (2.2.31c), nous obtenons la condition sur la composante tangentielle de  $\underline{u}^*$  :

$$\underline{u}^* \cdot \hat{t} = \frac{\Delta t}{\text{Re}} \nabla \phi^{n+1} \cdot \hat{t} \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (3.4.13)$$

Bien entendu, lors de l'évaluation de  $\underline{u}^*$ ,  $\phi^{n+1}$ , dans le schéma PMIII (2.2.31), n'est pas encore connu. Par contre, il a été proposé et démontré, dans [7, 17], que l'approximation  $\phi^{n+1} \approx \phi^n$  est suffisante pour l'obtention d'une convergence d'ordre deux en le temps près de la frontière. Par conséquent, (3.4.13) devient :

$$\underline{u}^* \cdot \hat{t} = \frac{\Delta t}{\text{Re}} \nabla \phi^n \cdot \hat{t} \quad \text{sur } \Gamma_M \quad (3.4.14)$$

Ainsi, nous obtenons les valeurs à appliquer aux particules imaginaires, en utilisant (3.4.2) et (3.4.6) :

$$\underline{u}_{i'_b}^{n+1} = -\underline{u}_i^{n+1} \quad (3.4.15a)$$

$$\underline{u}_{i'_b}^* \cdot \hat{n}_{i'_b} = -\underline{u}_i^* \cdot \hat{n}_{i_b} \quad (3.4.15b)$$

$$\underline{u}_{i'_b}^* \cdot \hat{t}_{i_b} = \left( 2 \frac{\Delta t}{\text{Re}} \nabla \phi_{i_b}^n - \underline{u}_{i'_b}^* \right) \cdot \hat{t}_{i_b} \quad (3.4.15c)$$

$$\phi_{i'_b}^{n+1} = \phi_i^{n+1} \quad (3.4.15d)$$

### 3.4.4. $\Gamma_F$ : Surface Libre

Afin de modéliser les frontières libres, c'est-à-dire, les interfaces entre un fluide d'intérêt et un gaz, nous allons imposer les conditions aux limites suivantes [10, 16, 33, 42] :

$$\left[ \underline{\sigma} \right] \cdot \hat{n} = \tau \kappa \hat{n} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (\text{Condition cinématique}) \quad (3.4.16a)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (\text{Condition d'incompressibilité}) \quad (3.4.16b)$$

où,  $\left[ \underline{\sigma} \right] = \underline{\sigma}_f - \underline{\sigma}_g$  est le saut de stresse sur l'interface  $\Gamma_F$ ,  $\underline{\sigma}_g$  est le tenseur des contraintes de Cauchy du gaz et  $\underline{\sigma}_f$  celui du fluide,  $\tau$  est la tension superficielle et  $\kappa$  la courbure de la surface  $\Gamma_F$ .

Afin de simplifier notre problème, nous allons supposer que  $\tau = 0$ ,  $p_g = 0$  et  $\eta_g = 0$ . Ainsi, les conditions aux limites (3.4.16) se simplifient en :

$$\underline{\sigma} \cdot \hat{n} = \underline{0} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.17a)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.17b)$$

où, puisque chacune des quantités dépend maintenant uniquement du fluide, nous avons laissé tomber les indices désignant les milieux.

Exprimé en composantes tangentielle et normale, (3.4.17) devient :

$$p = \hat{n} \cdot (\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^\top) \cdot \hat{n} \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.18a)$$

$$\hat{t} \cdot (\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^\top) \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.18b)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.18c)$$

Puisque, dans le schéma de discrétisation temporelle PMIII (2.2.31), la pression à déterminer apparait au pas  $n + \frac{1}{2}$  et le champ de vitesse au pas  $n + 1$ , nous allons imposer les conditions frontière suivantes :

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \hat{n}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left( \nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}} + \left( \nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}} \right)^\top \right) \cdot \hat{n}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{sur } \Gamma_F^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.4.19a)$$

$$\hat{t}^{n+1} \cdot \left( \nabla \underline{u}^{n+1} + \left( \nabla \underline{u}^{n+1} \right)^\top \right) \cdot \hat{n}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F^{n+1} \quad (3.4.19b)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_F^{n+1} \quad (3.4.19c)$$

Bien entendu, cette forme ne permet pas de trouver aisément des valeurs à attribuer aux particules images créées à l'aide de la méthode MBT, voir la section 3.2.2. Par conséquent, nous allons utiliser quelques astuces afin d'obtenir des conditions applicables aux composantes du champ de vitesse. Pour ce faire, nous allons nous inspirer de la philosophie de la

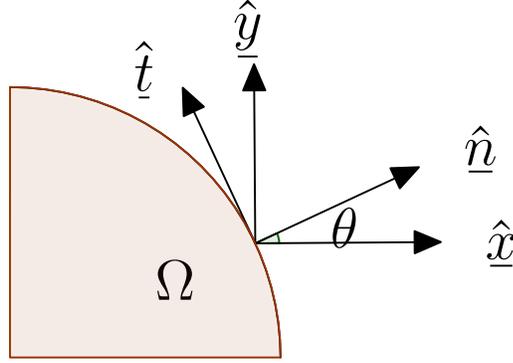


FIGURE 3.11. Changement de coordonnées

méthode *boundary-fitted coordinate* [33, 42] et du fait que la méthode MBT est, en fait, une linéarisation locale de la frontière. De cette manière, nous allons être capables d'obtenir des conditions de Neumann sur les composantes cartésiennes de  $\underline{u}^{n+1}$  et  $\underline{u}^*$  et des conditions de Dirichlet sur  $\phi^{n+1}$ .

Considérons d'abord la transformation entre le système de coordonnées cartésien  $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ , où  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont les vecteurs unitaires canoniques habituels, et le système de coordonnées local  $\{\hat{n}, \hat{t}\}$  sur la frontière  $\Gamma_F$ . Le changement de coordonnées s'exprime à l'aide de la transformation affine :

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} n_x & n_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n} \cdot \hat{x} & \hat{n} \cdot \hat{y} \\ \hat{t} \cdot \hat{x} & \hat{t} \cdot \hat{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad (3.4.20)$$

Puisque  $\hat{t} = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}} \hat{n}$ , cette transformation correspond à une rotation antihoraire d'angle  $\theta := \arccos(\hat{n} \cdot \hat{x})$  du système de coordonnées cartésiennes. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad (3.4.21)$$

On peut montrer que le changement de coordonnées induit les transformations suivantes sur les opérateurs de dérivées partielles :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.4.22)$$

Ici,  $u$  est une fonction différentiable quelconque.

#### 3.4.4.1. Conditions pour le champ de vitesse

Pour alléger la notation, nous allons laisser tomber les indices temporels dans cette sous-section et supposer que tout est évalué au pas de temps  $n + 1$ . En développant davantage la condition cinématique tangentielle (3.4.19b) et en utilisant le changement de coordonnées

(3.4.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{t} \cdot (\nabla u + (\nabla u)^T) \cdot \hat{n} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= 2\cos(\theta)\sin(\theta) \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

En posant :

$$C_1 := 2n_x n_y = 2\cos(\theta)\sin(\theta) \tag{3.4.24}$$

$$C_2 := n_x^2 - n_y^2 = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \tag{3.4.25}$$

la condition s'écrit comme :

$$-C_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u_x}{\partial y} + C_2 \frac{\partial u_y}{\partial x} + C_1 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{3.4.26}$$

En substituant utilisant le changement de coordonnées des dérivées partielles (3.4.22) de  $u$  dans (3.4.26), puis en posant :

$$K_1 := C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta) \tag{3.4.27}$$

$$K_2 := C_1 \cos(\theta) - C_2 \sin(\theta) \tag{3.4.28}$$

nous obtenons :

$$-K_2 \frac{\partial u_x}{\partial n} + K_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} + K_1 \frac{\partial u_y}{\partial n} + K_2 \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \tag{3.4.29}$$

En fait, nous pouvons simplifier  $K_1$  et  $K_2$  en y substituant les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  :

$$K_1 = C_1 \sin(\theta) + C_2 \cos(\theta) = \sin^2(\theta)\cos(\theta) + \cos^3(\theta) = \cos(\theta) \tag{3.4.30}$$

$$K_2 = C_1 \cos(\theta) - C_2 \sin(\theta) = \sin(\theta)\cos^2(\theta) + \sin^3(\theta) = \sin(\theta) \tag{3.4.31}$$

Ainsi, (3.4.29) prend la forme simplifiée :

$$-\sin(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial n} + \cos(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial t} + \cos(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial n} + \sin(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \tag{3.4.32}$$

En appliquant la même démarche à la condition d'incompressibilité (3.4.19c), nous obtenons :

$$\cos(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial n} - \sin(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial t} + \sin(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial n} + \cos(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0 \tag{3.4.33}$$

Nous allons maintenant tenter de découpler les dérivées normales en combinant les conditions (3.4.32) et (3.4.33). Nous obtenons de  $\sin(\theta) \cdot (3.4.18b) - \cos(\theta) \cdot (3.4.19c)$  :

$$\begin{aligned}
0 &= - \left( \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \right) \frac{\partial u_x}{\partial n} + (\sin(\theta) \cos(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta)) \frac{\partial u_x}{\partial t} \\
&\quad + (\sin(\theta) \cos(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta)) \frac{\partial u_y}{\partial n} + \left( \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \right) \frac{\partial u_y}{\partial t} \\
&= - \frac{\partial u_x}{\partial n} + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial u_x}{\partial t} - \left( \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \right) \frac{\partial u_y}{\partial t} \\
&= - \frac{\partial u_x}{\partial n} + C_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} - C_2 \frac{\partial u_y}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u_x}{\partial n} = C_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} - C_2 \frac{\partial u_y}{\partial t} \tag{3.4.35}$$

Similairement, nous obtenons de  $\cos(\theta) \cdot (3.4.18b) + \sin(\theta) \cdot (3.4.19c)$  :

$$\begin{aligned}
0 &= (-\cos(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta)) \frac{\partial u_x}{\partial n} + \left( \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \right) \frac{\partial u_x}{\partial t} \\
&\quad + \left( \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \right) \frac{\partial u_y}{\partial n} + (\cos(\theta) \sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta)) \frac{\partial u_y}{\partial t} \\
&= \left( \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \right) \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial n} + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\partial u_y}{\partial t} \\
&= C_2 \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial n} + C_1 \frac{\partial u_y}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u_y}{\partial n} = -C_2 \frac{\partial u_x}{\partial t} - C_1 \frac{\partial u_y}{\partial t} \tag{3.4.37}$$

Ainsi, nous avons les conditions de Neumann non homogène suivantes sur les composantes du champ de vitesse :

$$\frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial n} = g_x \left( \frac{\partial \underline{u}^{n+1}}{\partial t}, \hat{\underline{n}}^{n+1} \right) := C_1^{n+1} \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial t} - C_2^{n+1} \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma_F \tag{3.4.38a}$$

$$\frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial n} = g_y \left( \frac{\partial \underline{u}^{n+1}}{\partial t}, \hat{\underline{n}}^{n+1} \right) := -C_2^{n+1} \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial t} - C_1^{n+1} \frac{\partial u_y^{n+1}}{\partial t} \quad \text{sur } \Gamma_F \tag{3.4.38b}$$

où,

$$C_1^{n+1} = 2n_x^{n+1} n_y^{n+1} \tag{3.4.39}$$

$$C_2^{n+1} = (n_x^{n+1})^2 - (n_y^{n+1})^2 \tag{3.4.40}$$

Ainsi, nous obtenons les valeurs à appliquer au champ de vitesse des particules imaginaires, en utilisant (3.4.6) :

$$(u_x^{n+1})_{i'_b} = 2r_{i_b}^{n+1} (g_x)_{i_b} + (u_x^{n+1})_i \tag{3.4.41a}$$

$$(u_y^{n+1})_{i'_b} = 2r_{i_b}^{n+1} (g_y)_{i_b} + (u_y^{n+1})_i \tag{3.4.41b}$$

Malheureusement, puisque nous avons seulement deux conditions, il n'est pas possible de séparer complètement les dérivées normales des dérivées tangentielles. De plus, nous ne connaissons pas encore la configuration de la frontière, et donc le vecteur normal au prochain pas de temps. Par conséquent, nous allons utiliser une méthode itérative pour obtenir des approximations successives de la position ainsi que de la vitesse de la frontière. Pour ce faire, nous allons utiliser une méthode itérative couplée à une méthode de Broyden [4], présentée plus tard dans ce chapitre, et des différences centrées le long de la frontière pour approximer les dérivées tangentielles.

#### 3.4.4.2. Conditions pour les champs auxiliaires

Trouvons maintenant les conditions aux limites à imposer sur les champs auxiliaires obtenues avec la décomposition de Helmholtz-Hodge :

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^* - \frac{\Delta t}{\text{Re}} \underline{\nabla} \phi^{n+1} \quad (3.4.42)$$

Rappelons que, lorsque la frontière était une paroi solide, la condition imposée à  $\underline{u}^{n+1}$  était une condition de Dirichlet qui prescrivait  $\underline{u}^{n+1}$  sur la frontière. Ensuite, nous avons imposé une condition de Neumann sur  $\phi^{n+1}$  afin de satisfaire l'orthogonalité dans le théorème de décomposition de Helmholtz-Hodge. Dans un tel cas, Brown *et al.* [7] ont démontré que, pour obtenir une convergence temporelle d'ordre 2 du champ de pression près de la frontière, il était essentiel d'éviter l'obtention d'une couche limite pour  $\underline{u}^*$ .

Ici, la situation est différente. En effet, maintenant nous avons une condition de Neumann sur  $\underline{u}^{n+1}$  et c'est la pression, et donc  $\phi^{n+1}$ , qui sera prescrite sur la frontière. Par conséquent, nous allons emprunter la démarche de Yang et Prosperetti [42] et éviter l'obtention d'une couche limite pour  $\phi^{n+1}$ .

On se rappelle que l'équation de mise à jour de la pression peut s'exprimer comme :

$$p^{n+\frac{1}{2}} = \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2 \text{Re}} \Delta \phi^{n+1} \quad (3.4.43)$$

Ainsi, si nous posons :

$$\Delta \phi^{n+1} = 0 \quad (3.4.44)$$

sur la surface libre, on élimine le terme visqueux dans l'équation pour la pression. En se rappelant l'équation de Poisson pour  $\phi^{n+1}$  :

$$\Delta \phi^{n+1} = \frac{\text{Re}}{\Delta t} \underline{\nabla} \cdot \underline{u}^* \quad (3.4.45)$$

on déduit de (3.4.44) que le champ de vitesse auxiliaire doit être, lui aussi, incompressible sur la surface libre :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (3.4.46)$$

De plus, en substituant la décomposition de Helmholtz-Hodge dans la composante tangentielle de la condition sur le saut de stress (3.4.19b), nous obtenons :

$$\hat{t}^{n+1} \cdot (\nabla \underline{u}^* + (\nabla \underline{u}^*)^\top) \cdot \hat{n}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\text{Re}} \hat{t}^{n+1} \cdot (\nabla \nabla \phi^{n+1} + (\nabla \nabla \phi^{n+1})^\top) \cdot \hat{n}^{n+1} \quad (3.4.47)$$

$$:= d(\nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1}) \quad (3.4.48)$$

Finalemnt, en substituant (3.4.19a) et (3.4.44) dans l'équation de mise à jour de la pression (3.4.43), on obtient la condition de Dirichlet suivante sur  $\phi^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= p^{n+\frac{1}{2}} \\ &= \hat{n}^{n+\frac{1}{2}} \cdot (\nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}} + (\nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}})^\top) \cdot \hat{n}^{n+\frac{1}{2}} \\ &:= c(\nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}, \hat{n}^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.4.49)$$

Pour résumer, on a les conditions aux limites suivantes, similaires à celles des variables primitives  $\underline{u}^{n+1}$  et  $p^{n+\frac{1}{2}}$ , pour les champs auxiliaires sur la surface libre :

$$\phi^{n+1} = c(\nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}, \hat{n}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.4.50a)$$

$$\hat{t}^{n+1} \cdot (\nabla \underline{u}^* + (\nabla \underline{u}^*)^\top) \cdot \hat{n}^{n+1} = d(\nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1}) \quad (3.4.50b)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}^* = 0 \quad (3.4.50c)$$

À l'aide du même changement de coordonnées (3.4.21) que pour les conditions sur  $\underline{u}^{n+1}$ , nous obtenons de (3.4.50b) et (3.4.50c) :

$$-\sin(\theta) \frac{\partial u_x^*}{\partial n} + \cos(\theta) \frac{\partial u_x^*}{\partial t} + \cos(\theta) \frac{\partial u_y^*}{\partial n} + \sin(\theta) \frac{\partial u_y^*}{\partial t} = d(\nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1}) \quad (3.4.51a)$$

$$\cos(\theta) \frac{\partial u_x^*}{\partial n} - \sin(\theta) \frac{\partial u_x^*}{\partial t} + \sin(\theta) \frac{\partial u_y^*}{\partial n} + \cos(\theta) \frac{\partial u_y^*}{\partial t} = 0 \quad (3.4.51b)$$

Nous allons maintenant tenter de découpler les dérivées normales en combinant les conditions (3.4.51a) et (3.4.51b). Nous obtenons de  $\sin(\theta) \cdot (3.4.51a) - \cos(\theta) \cdot (3.4.51b)$  :

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial n} = C_1 \frac{\partial u_x^*}{\partial t} - C_2 \frac{\partial u_y^*}{\partial t} - n_y d(\nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1}) \quad (3.4.52)$$

Similairement, nous obtenons de  $\cos(\theta) \cdot (3.4.51a) + \sin(\theta) \cdot (3.4.51b)$  :

$$\frac{\partial u_y^*}{\partial n} = -C_2 \frac{\partial u_x^*}{\partial t} - C_1 \frac{\partial u_y^*}{\partial t} + n_x d(\nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1}) \quad (3.4.53)$$

Ainsi, nous avons les conditions de Neumann non homogène suivantes sur les composantes du champ de vitesse auxiliaire :

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial n} = G_x \left( \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t}, \nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1} \right) := g_x \left( \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial t}, \hat{n}^{n+1} \right) - n_y^{n+1} d(\nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1}) \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.54a)$$

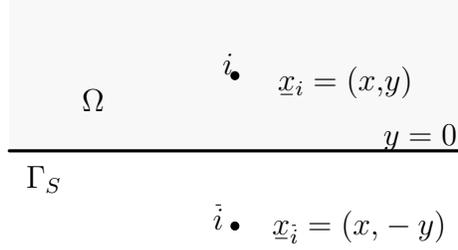


FIGURE 3.12. Image symétrique d'une particule  $i$

$$\frac{\partial u_y^*}{\partial n} = G_y \left( \frac{\partial u^*}{\partial t}, \nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1} \right) := g_y \left( \frac{\partial u^*}{\partial t}, \hat{n}^{n+1} \right) + n_x^{n+1} d \left( \nabla \nabla \phi^{n+1}, \hat{n}^{n+1} \right) \quad \text{sur } \Gamma_F \quad (3.4.54b)$$

Ainsi, nous obtenons les valeurs à appliquer aux champs auxiliaires des particules imaginaires, en utilisant (3.4.2) et (3.4.6) :

$$(u_x^*)_{i'_b} = 2r_{ii_b}^{n+1} (G_x)_{i_b} + (u_x^*)_i \quad (3.4.55a)$$

$$(u_y^*)_{i'_b} = 2r_{ii_b}^{n+1} (G_y)_{i_b} + (u_y^*)_i \quad (3.4.55b)$$

$$\phi_{i'_b}^{n+1} = 2c_{i_b} - \phi_i^{n+1} \quad (3.4.55c)$$

### 3.4.5. $\Gamma_s$ : Ligne de symétrie

Cette condition apparait sur la ligne de symétrie du problème. Il s'agit d'une condition artificielle, visant l'économie de calcul. Dans nos deux applications, nous allons rencontrer une ligne de symétrie en  $y = 0$ . Comme nous en avons discuté précédemment, cette condition sera implémentée en miroitant les particules dans le domaine de résolution situé près de la frontière symétrique. Ainsi, si une particule  $i$  du domaine de résolution de vecteur position  $\underline{x}_i = (x, y)$  est située à une distance inférieure au rayon du support compact de la frontière symétrique, située en  $y = 0$ , nous allons créer une particule miroir  $\bar{i}$ , de position  $\underline{x}_{\bar{i}} = (x, -y)$ . Les valeurs que nous allons imposer aux champs de  $\bar{i}$  dépendront de leurs parités par rapport à la ligne de symétrie. Dans ce qui suit, nous allons appeler les fonctions qui sont paires dans la direction  $y$  des fonctions  $y$ -paires et, similairement, nous allons appeler les fonctions qui sont impaires dans la direction  $y$  des fonctions  $y$ -impaires.

Soit  $f$  un champ scalaire  $y$ -pair, c'est-à-dire tel que :

$$f(x, y) = f(x, -y) \quad (3.4.56)$$

Nous aurons, dans ce cas, que :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, -y)}{\partial x} \quad (3.4.57a)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial f(x,-y)}{\partial y} \quad (3.4.57b)$$

Ainsi, lorsque  $f$  est  $y$ -paire, nous avons que  $\partial_x f$  est  $y$ -paire et  $\partial_y f$  est  $f$ -impaire.

Similairement, soit  $g$  un champ scalaire  $y$ -impair, c'est-à-dire tel que :

$$g(x,y) = -g(x,-y) \quad (3.4.58)$$

Alors, nous pouvons montrer que :

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial g(x,-y)}{\partial x} \quad (3.4.59a)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,-y)}{\partial y} \quad (3.4.59b)$$

Par conséquent, lorsque  $g$  est  $y$ -impaire, nous avons que  $\partial_x g$  est  $y$ -impaire et  $\partial_y g$  est  $y$ -paire.

Afin d'alléger la notation, nous allons écrire  $f = +$  lorsque la fonction est  $y$ -paire et  $f = -$  lorsque la fonction est  $y$ -impaire. Nous savons que, dans un écoulement, une condition de symétrie correspond à une condition de non-pénétration ainsi qu'à une force de cisaillement nulle [10] :

$$\underline{u}^{n+1} \hat{n} = 0 \quad (3.4.60a)$$

$$\hat{t}^{n+1} \cdot \underline{\sigma}^{n+1} \cdot \hat{n}^{n+1} = 0 \quad (3.4.60b)$$

À l'aide de (3.4.60), nous pouvons montrer que :

$$\underline{u}^{n+1} = (+, -) \quad (3.4.61)$$

Si, de plus, nous posons une condition de Neumann sur le champ de pression auxiliaire  $\phi^{n+1}$  :

$$\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \hat{n}} = 0 \quad (3.4.62)$$

nous pouvons montrer que (3.4.60) et (3.4.62) impliquent :

$$\underline{u}^* = (+, -) \quad (3.4.63a)$$

$$\phi = + \quad (3.4.63b)$$

En effet, on se rappelle que, lorsqu'une fonction  $f$  possède une condition de Dirichlet homogène, nous satisfaisons la condition en imposant  $f_{i'} = -f_i$ , où  $i$  est une particule du domaine physique et  $i'$  une particule imaginaire issue de  $i$ . Ainsi, avoir une condition de Dirichlet homogène sur  $y = 0$  est équivalent à supposer que le champ est impair. Similairement, lorsqu'une fonction  $g$  possède une condition de Neumann homogène, nous avons que  $g_{i'} = g_i$ . Par conséquent, une condition de Neumann homogène sur  $y = 0$  est équivalent à supposer que le champ est pair.

Dans le problème d'extrusion, la frontière libre va traverser la ligne de symétrie. Par conséquent, nous allons créer des marqueurs miroirs  $\bar{i}_b$  des marqueurs  $i_b$  de la frontière libre, comme sur la figure 3.10 de la page 48. Les conditions aux limites appliquées sur les marqueur  $\bar{i}_b$  seront données en fonction de la parité de celles sur  $i_b$ . Ainsi, en observant que :

$$\underline{\nabla}u = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \underline{\nabla}\phi = (+, -) \text{ et } \underline{\nabla}\underline{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad (3.4.64)$$

$$\hat{t} = (-, +), \quad \hat{n} = (+, -). \quad (3.4.65)$$

on obtient, pour les fonctions définies dans les conditions aux limites d'une surface libre (3.4.47), (3.4.49), (3.4.38) et (3.4.54) :

$$(g_1, g_2) = (+, -) \quad (3.4.66a)$$

$$d = - \quad (3.4.66b)$$

$$(G_1, G_2) = (+, -) \quad (3.4.66c)$$

$$c = + \quad (3.4.66d)$$

$$(3.4.66e)$$

### 3.5. ÉVOLUTION DE LA FRONTIÈRE ET DU DOMAINE - MÉTHODE DE BROYDEN

D'abord, nous allons adopter la notation habituelle  $\underline{x}_i^n$  et  $\underline{u}_i^n$  pour désigner les valeurs approximatives de  $\underline{x}_i(t^n)$  et  $\underline{u}(\underline{x}_i(t^n), t^n)$  au temps  $t^n$  des particules dont les indices forment  $\Phi$ . Aussi, nous allons utiliser la notation :

$$\Omega^n = \{\underline{x}_i^n \mid i \in \Phi\} \quad (3.5.1)$$

$$\Gamma^n = \{\underline{x}_i^n \mid i \in \Psi\} \quad (3.5.2)$$

pour désigner l'ensemble des positions approximatives au pas  $n$ , de  $\Phi$  et  $\Psi$  respectivement.

Puisque, notre schéma implicite requiert la connaissance de la configuration du domaine et de sa frontière au pas  $n + 1$ , nous allons utiliser une approche semi-implicite, basée sur celle de [4, 19, 21], afin d'obtenir des approximations successives  $\{\Omega^{n+1, [k]}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Omega^{n+1}$  et  $\{\Gamma^{n+1, [k]}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Gamma^{n+1}$ .

Pour se faire,  $\forall i \in \Phi \cup \Psi$ , nous allons construire des suites  $\{\underline{x}_i^{n, [k]} \in \Omega^{n+1, [k]} \cup \Gamma^{n+1, [k]}\}_{k \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\underline{x}_i^{n+1, [0]} = \underline{x}_i^n \quad (3.5.3)$$

$$\underline{x}_i^{n+1, [1]} = \underline{x}_i^{n+1, [0]} + \Delta t \underline{u}_i^n \quad (3.5.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_i^{n, [k]} = \underline{x}_i^{n+1} \quad (3.5.5)$$

Rappelons que l'équation de mise à jour de la position d'une particule est :

$$\underline{x}_i^{n+1} = \underline{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1}) \quad (3.5.6)$$

Supposons que nous avons une approximation  $\underline{u}_i^{n+1,[k]}$  de  $\underline{u}_i^{n+1}$ , trouvée à l'aide de  $\underline{x}_i^{n+1,[k]}$ . Nous pouvons, en substituant l'approximation dans (3.5.6), trouver une nouvelle position approximative :

$$\underline{x}_i^{n+1,[k+1]} = \underline{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} (\underline{u}_i^n + \underline{u}_i^{n+1,[k]}) \quad (3.5.7)$$

Ceci nous amène à définir la famille de fonctions :

$$\underline{g}_i^{n+1,[k]}(\underline{x}) := \underline{x} - \underline{x}_i^n - \frac{\Delta t}{2} [\underline{u}_i^n + \underline{U}^{n+1,[k]}(\underline{x})] \quad (3.5.8)$$

où :

$$\underline{U}^{n+1,[k]}(\underline{x}) = \sum_{j \in \mathcal{B}_{\underline{x}}^{n+1,[k]}} \mathcal{A}_j \underline{u}_j^{n+1,[k]} W(\underline{x} - \underline{x}_j^n, h) \quad (3.5.9)$$

Remarquons que pour les particules imaginaires obtenues par la méthode MBT 3.2.2, nous allons prendre l'aire pondérée (3.2.1).

Ainsi, pour obtenir une nouvelle approximation de la position d'une particule  $i \in \phi$ , nous allons donc trouver une racine de l'équation (3.5.8) :

$$\underline{g}_i^{n+1,[k]}(\underline{x}_i) = \underline{0} \quad (3.5.10)$$

Pour ce faire, nous allons utiliser une méthode de quasi-Newton nommée la **méthode de Broyden**. Il s'agit d'une variante de la méthode de Newton où, au lieu de recalculer le jacobien de  $\underline{g}_i^{n+1,[k]}$  à chacune des itérations de la méthode, nous allons le calculer seulement à la première itération. Ceci permettra une grande économie de calculs.

Finalement, nous itérons cet algorithme, à chacun des pas de temps, jusqu'à ce que les approximations successives ne changent plus, c'est-à-dire jusqu'à atteindre une tolérance désirée  $\epsilon$ . Il est cependant bien de noter que cet algorithme converge vers la valeur exacte lorsque, non seulement  $\epsilon \rightarrow 0$ , mais aussi lorsque  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  et  $h$  tendent vers zéro.

Pour résumer, nous pouvons donner une esquisse du squelette de la méthode itérative que nous allons utiliser :

**while**  $n < n_{max}$  **do**

    Définir  $\underline{u}^{n+1,[0]} = \underline{u}^n$

    Définir  $\underline{u}^{*,[0]} = \underline{u}^*$ , où  $\underline{u}^*$  est celui du pas de temps précédent.

    Définir  $\phi^{n+1,[0]} = \phi^n$

    Définir  $\underline{x}^{n+1,[1]} = \underline{x}^n + \Delta t \underline{u}^n$

    Définir  $\underline{x}^{n+1,[2]} = \underline{0}$

$k = 1$  ;

**while**  $\left\| \underline{x}_i^{n+1,[k+1]} - \underline{x}_i^{n+1,[k]} \right\|_{\infty} > \epsilon$  **do**

Calculer  $\underline{u}^{*,[k]}$  ;  
 Calculer  $\phi^{n+1,[k]}$  ;  
 Calculer  $\underline{u}^{n+1,[k]}$  ;  
 Calculer  $p^{n+\frac{1}{2},[k]}$  ;  
 Définir  $\underline{U}(\underline{x}) = \sum_{j \in \mathcal{B}_{\underline{x}}^{n+1,[k]}} \mathcal{A}_j \underline{u}_j^{n+1,[k]} W(\underline{x} - \underline{x}_j^n, h)$  ;  
 Définir  $\underline{g}_i = \underline{x} - \underline{x}_i^n - \frac{\Delta t}{2} [\underline{u}_i^n + \underline{U}(\underline{x})]$  ;  
 Résoudre  $\underline{g}_i(\underline{x}_i) = 0$ , en utilisant la méthode de Broyden avec la  
 valeur initiale  $\underline{x}_i^{(0)} = \underline{x}_i^{n+1,[k]}$ , et ce  $\forall i \in \Phi$  ;  
 Définir  $\underline{x}_i^{n+1,[k+1]} = \underline{x}_i^{n+1,[k]}$ ,  $\forall i \in \Phi$  ;  
 Définir  $\underline{x}_i^{n+1,[k+2]} = \underline{x}_i$ ,  $\forall i \in \Phi$  ;  
 $k = k + 1$  ;

**end while**

Définir  $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^{n+1,[k-1]}$  ;  
 Définir  $p^{n+\frac{1}{2}} = p^{n+\frac{1}{2},[k-1]}$  ;  
 Définir  $\underline{u}^* = \underline{u}^{*,[k-1]}$  ;  
 Définir  $\phi^{n+1} = \phi^{n+1,[k-1]}$  ;  
 Définir  $\underline{x}^{n+1} = \underline{x}^{n+1,[k+1]}$  ;  
 $n = n+1$  ;

**end while**

Notons que, lorsque nous allons rencontrer des champs encore non déterminés dans notre schéma, nous allons utiliser les approximations les plus récentes. Par exemple, dans le calcul de  $\underline{u}^{*,[k]}$ , la condition de surface libre nécessite la connaissance des dérivées tangentielles de  $\underline{u}^*$ . Ainsi, nous allons poser :

$$\frac{\partial u_x^{n+1,[k]}}{\partial n} = G_x \left( \frac{\partial \underline{u}^{*,[k-1]}}{\partial t}, \hat{\underline{n}}^{n+1,[k]} \right) \quad (3.5.11a)$$

$$\frac{\partial u_y^{n+1,[k]}}{\partial n} = G_y \left( \frac{\partial \underline{u}^{*,[k-1]}}{\partial t}, \hat{\underline{n}}^{n+1,[k]} \right) \quad (3.5.11b)$$

Lorsque  $k = 0$ , nous allons supposer  $\underline{u}^{*,[-1]} = \underline{u}^*$ , où  $\underline{u}^*$  est la valeur du champ de vitesse auxiliaire calculée au pas de temps précédent. Par conséquent, nous conserverons aussi les valeurs des champs auxiliaires à chaque pas de temps.



# Chapitre 4

---

## VALIDATION NUMÉRIQUE

### 4.1. ÉCOULEMENT DE POISEUILLE BIDIMENSIONNEL

Pour valider notre schéma, nous avons opté, en un premier temps, pour la résolution d'un écoulement de Poiseuille bidimensionnel. Ceci va nous permettre de tester notre schéma PMIII (2.2.31), la méthode MBT, voir la section 3.2.2, et la méthode itérative de Broyden, voir la section 3.5, sans avoir à nous soucier d'une frontière libre. De plus, puisqu'il s'agit d'un problème dont il existe une solution analytique, nous allons pouvoir faire une analyse de l'ordre de convergence. Ainsi, nous allons donc reporter les problèmes de frontières libres à la prochaine section, dans laquelle nous allons tenter de résoudre un problème d'extrusion, engendré par un écoulement de Poiseuille.

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire d'un fluide visqueux, situé entre deux plaques parallèles infinies, poussé par un gradient de pression constant. Nous allons supposer que le domaine  $\Omega$  est une bande bidimensionnelle de largeur  $H$  dont le centre est  $y = 0$ . Ainsi :

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{H}{2} < y < \frac{H}{2} \right\} \quad (4.1.1)$$

$$\Gamma_+ = \left\{ \left( x, \frac{H}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.1.2)$$

$$\Gamma_- = \left\{ \left( x, -\frac{H}{2} \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.1.3)$$

$$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \quad (4.1.4)$$

Afin d'obtenir un écoulement dans la direction des  $x$  croissants, nous allons imposer un gradient de pression constant et négatif dans la direction des  $x$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \kappa < 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.1.5)$$

Aussi, nous allons supposer que le fluide est initialement au repos et imposer la condition initiale :

$$\underline{u}(x,0) = \underline{0} \quad (4.1.6)$$

De plus, nous allons imposer les conditions aux limites de non-glissement et de non-pénétration :

$$\underline{u}(\Gamma,t) = \underline{0} \quad (4.1.7)$$

#### 4.1.1. Solution analytique du problème de Poiseuille

Nous allons maintenant chercher la solution analytique de ce problème. Pour ce faire, nous allons supposer que la solution est de la forme :

$$\underline{u} = (u(y,t),0) \quad (4.1.8)$$

Ceci n'est pas obligatoire, mais simplifie la procédure. En substituant l'ansatz (4.1.8) dans l'équation Navier-Stokes (1.1.40a), nous obtenons le problème à résoudre :

$$\rho \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = -\kappa + \eta \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} \quad \text{pour } (y,t) \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) \times [0,\infty) \quad (4.1.9a)$$

$$u(y,0) = 0 \quad \text{pour } y \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right] \quad (4.1.9b)$$

$$u\left(-\frac{H}{2}, t\right) = u\left(\frac{H}{2}, t\right) = 0 \quad \text{pour } t \in [0,\infty) \quad (4.1.9c)$$

Dans un premier lieu, nous allons chercher une solution stationnaire  $w(y)$  au problème de Poiseuille. Cette solution correspondra à la solution asymptotique de cet écoulement. Ensuite, nous allons utiliser cette solution afin d'adimensionner le problème. Finalement, nous trouverons la solution transitoire  $u(y,t)$  de l'écoulement, c'est-à-dire la solution partant des conditions initiales et se développant vers la solution d'équilibre, en perturbant la solution d'équilibre à l'aide d'une fonction  $v(y,t)$ .

##### 4.1.1.1. Solution stationnaire

Cherchons une solution stationnaire  $w(y)$  au problème de Poiseuille. En substituant dans (4.1.9a) et PoisEDPbdr, nous obtenons :

$$\frac{d^2 w(y)}{dy^2} = \frac{\kappa}{\eta} \quad \text{pour } y \in \left(-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right) \quad (4.1.10a)$$

$$w\left(-\frac{H}{2}\right) = w\left(\frac{H}{2}\right) = 0 \quad (4.1.10b)$$

Ainsi, en intégrant l'équation différentielle ordinaire (4.1.10a) et en appliquant les conditions aux limites (4.1.10b), nous obtenons la solution :

$$w(y) = \frac{\kappa}{8\eta} (4y^2 - H^2) \quad (4.1.11)$$

On note que cette solution est une parabole dont le maximum est en  $y = 0$ . Ainsi, nous définissons :

$$U := w(0) = -\frac{\kappa H^2}{8\eta} \quad (4.1.12)$$

Dans ce qui suit, nous allons travailler avec les variables adimensionnées (1.3.1). Nous allons prendre  $H$ , le diamètre du tube, comme longueur de référence. Pour ce qui est de la vitesse de référence nous allons prendre la vitesse maximale  $U$  de l'écoulement stationnaire. Ainsi, la vitesse stationnaire (4.1.11) adimensionnée est :

$$w^*(y^*) = 1 - 4y^{*2} \quad (4.1.13)$$

Finalement, nous allons adimensionner  $\kappa$  de la même manière que le gradient de pression, c'est-à-dire :

$$\kappa = \frac{\eta U}{H^2} \kappa^* \quad (4.1.14)$$

À l'aide de (4.1.12), on observe que ceci implique :

$$\kappa^* = -8 \quad (4.1.15)$$

**Remarque 4.1.1.** Afin de simplifier la notation, nous allons négliger la notation étoilée dans le reste de cette section. Ainsi, toutes les variables rencontrées seront considérées comme adimensionnées.

#### 4.1.1.2. Solution transitoire

Nous pouvons réécrire (4.1.9) à l'aide des variables adimensionnées :

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left( 8 + \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} \right) \quad \text{pour } (y,t) \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times [0, \infty) \quad (4.1.16a)$$

$$u(y,0) = 0 \quad \text{pour } y \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (4.1.16b)$$

$$u\left(-\frac{1}{2}, t\right) = u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0 \quad \text{pour } t \in [0, \infty) \quad (4.1.16c)$$

Cherchons, maintenant, la solution transitoire  $u(y,t)$  du problème de Poiseuille (4.1.16). Pour se faire, nous allons perturber la solution stationnaire  $w(y)$  afin de rendre l'équation (4.1.16a) homogène et pouvoir résoudre par séparation de variables. Ainsi, nous allons supposer :

$$u(y,t) = w(y) + v(y,t) \quad (4.1.17)$$

En substituant (4.1.17) dans (4.1.16), Nous pouvons réexprimer le problème en fonction de la perturbation  $v(y,t)$  :

$$\frac{\partial v(y,t)}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} \quad \text{pour } (y,t) \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times [0, \infty) \quad (4.1.18a)$$

$$v(y,0) = -w(y) = 4y^2 - 1 \quad \text{pour } y \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (4.1.18b)$$

$$v\left(-\frac{1}{2}, t\right) = v\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0 \quad \text{pour } t \in [0, \infty) \quad (4.1.18c)$$

Nous pouvons résoudre ce problème par la méthode de séparation de variables ainsi qu'un développement en série de Fourier [12, 18, 32] pour obtenir :

$$v(y, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32}{\pi^3(2n+1)^3} \sin\left((2n+1)\pi\left(y + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\text{Re}}t\right) \quad (4.1.19)$$

Ainsi, on obtient la solution transitoire du problème de Poiseuille :

$$u(y, t) = (1-4y^2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32}{\pi^3(2n+1)^3} \sin\left((2n+1)\pi\left(y + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{\text{Re}}t\right) \quad (4.1.20)$$

#### 4.1.2. Résolution numérique du problème de Poiseuille

Nous allons maintenant décrire la procédure de résolution numérique du problème de Poiseuille transitoire adimensionné (4.1.16).

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que le champ de vitesse est invariant par translation dans la direction des  $x$ . Ainsi, résoudre pour le champ de vitesse dans un tuyau infini est équivalent à résoudre dans une bande périodique dont la longueur est finie. Par contre, la pression dépend linéairement de  $x$ . En effet, en intégrant (4.1.5), nous obtenons  $p(x) = \kappa x + p(0)$ . Afin de rendre le problème complètement périodique, nous pouvons séparer le champ de pression en deux composantes [32], l'une dynamique (interne) et l'autre hydrostatique (externe) :

$$p = p_d + p_h \quad (4.1.21)$$

En supposant  $p_h = \kappa x + p(0)$ , nous pouvons sortir  $p_h$  de la pression totale  $p$  et l'inclure dans la contribution des forces externes de l'équation de la quantité de mouvement (1.3.6a) :

$$-\frac{1}{\text{Re}}\nabla p = -\frac{1}{\text{Re}}\nabla p_d - \frac{1}{\text{Re}}\nabla p_h \quad (4.1.22)$$

$$= -\frac{1}{\text{Re}}\nabla p_d - \frac{1}{\text{Re}}(\kappa, 0) \quad (4.1.23)$$

$$= -\frac{1}{\text{Re}}\nabla p_d + \underline{f} \quad (4.1.24)$$

De cette manière, nous pouvons engendrer un écoulement de Poiseuille à l'aide de la force par unité de masse :

$$\underline{f} = -\frac{1}{\text{Re}}(\kappa, 0) = \frac{1}{\text{Re}}(8, 0) \quad (4.1.25)$$

Nous avons maintenant un problème dont le champ de vitesse et celui de pression dynamique sont indépendants de  $x$ . Nous pouvons donc résoudre le problème dans une bande périodique de longueur  $L$  fixé.

De plus, nous remarquons que ce problème possède une ligne de symétrie en  $y = 0$ . Ainsi, nous pouvons conserver la partie supérieure de la bande en introduisant une frontière artificielle symétrique.

Par conséquent, nous allons résoudre numériquement le problème dans la demi-bande supérieure, de période  $L$  :

$$\Omega_R = \left\{ (x,y) \mid -L \leq x < 0, 0 < y < \frac{1}{2} \right\} \quad (4.1.26)$$

dont la frontière  $\Gamma$  du domaine de résolution sera constituée d'une frontière physique, correspondant à la paroi solide supérieure du tube :

$$\Gamma_M = \left\{ \left( x, \frac{1}{2} \right) \mid -L \leq x < 0 \right\} \quad (4.1.27)$$

d'une frontière artificielle symétrique :

$$\Gamma_S = \{ (x,0) \mid -L \leq x < 0 \} \quad (4.1.28)$$

et de la frontière artificielle périodique :

$$\Gamma_P = \Gamma_I \cup \Gamma_O \quad (4.1.29)$$

$$= \left\{ (-L,y) \mid 0 < y < \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (0,y) \mid 0 < y < \frac{1}{2} \right\} \quad (4.1.30)$$

Ici,  $\Gamma_I$  est la frontière d'entrée que nous allons identifier par périodicité à  $\Gamma_O$ , la frontière de sortie.

**Remarque 4.1.2.** *Bien entendu, puisque la solution de ce problème est indépendante de  $x$ , nous aurions pu résoudre numériquement avec une seule dimension spatiale  $y$ . Par contre, cette approche fonctionne seulement avec une méthode eulérienne. En effet, le déplacement des particules se fait dans la direction des  $x$ . De plus, nous allons retrouver cet écoulement à l'intérieur du problème d'extrusion. Par conséquent, il est avantageux de bien comprendre comment se comportent les solutions numériques en deux dimensions.*

La discrétisation du domaine de résolution se fera, au temps initial  $t = 0$ , sur une grille uniforme. Ainsi, pour un nombre de référence pair  $N$  fixé, nous définissons le domaine de résolution :

$$\Omega_R^0 = \left\{ \underline{x}_{k_{ij}} = (x_i, y_j) = \left( \left[ i - \frac{1}{2} \right] \Delta x - 1, \left[ j - \frac{1}{2} \right] \Delta y \right) \mid i \in \{1, \dots, N\}, j \in \left\{ 1, \dots, \frac{N}{2} \right\} \right\} \quad (4.1.31)$$

et le domaine matériel associé :

$$\Phi = \left\{ k_{ij} = i + (j - 1)N \mid i \in \{1, \dots, N\}, j \in \left\{ 1, \dots, \frac{N}{2} \right\} \right\} \quad (4.1.32)$$

Ici,  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$  sont les distances horizontales et verticales séparant les particules voisines. Ainsi, puisque les particules sont uniformément distribuées, nous allons fixer l'aire attribuée aux particules comme étant  $\mathcal{A}_k = \Delta x \Delta y = \Delta x^2, \forall k \in \Phi$ .

Ainsi, cette discrétisation partitionne  $\Omega_R^0$  en carrés d'aires égales  $\Delta x^2$  dont les nœuds sont les centres de ces carrés.

Afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux de Kéou Noutcheuwa [18], nous avons opté pour les paramètres physiques suivants :  $Re = 1.25 \times 10^{-2}$ ,  $H = 10^{-3}m$ ,  $\rho = 10^3 kgm^2$  et  $\eta = 10^{-3} kgm^{-1}s^{-1}$ . Ceci donne une vitesse de référence  $U = 1.25 \times 10^{-5}ms^{-1}$ . Aussi, nous avons choisi  $L = H$  pour la longueur de la bande et nous allons prendre le pas de temps  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ , afin de satisfaire les conditions de stabilité [32]. Finalement, nous allons faire évoluer l'écoulement jusqu'au temps final  $T = 1.25 \times 10^{-2}$ . Ce temps est suffisant pour obtenir un écoulement stationnaire [18].

### 4.1.3. Analyse de l'erreur et résultats

#### 4.1.3.1. Erreur de discrétisation

Avant de présenter nos résultats, nous allons aborder l'erreur de discrétisation de la méthode SPH. Pour ce faire, nous allons présenter les résultats obtenus par Quinlan *et al.* [34].

Supposons, pour le moment, que le problème résolu soit unidimensionnel et que les particules sont distribuées uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Nous allons supposer que les particules possèdent toutes la même aire  $\Delta x$ , qui correspond aussi à la distance entre les particules. Ainsi, les aires attribuées à chacune des particules ne se chevauchent pas et il n'y a pas de vide, c'est-à-dire que l'aire des particules partitionnent  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in C^\infty$  une fonction d'intérêt dont nous désirons approximer la dérivée avec la méthode SPH et une fonction de lissage  $W$  infiniment différentiable à l'intérieur de son support compact de rayon  $2h$ . Nous allons noter  $\beta$  le plus grand nombre tel que la  $\beta$ -ième dérivée de  $W$ , et toutes celles d'ordres inférieurs, soient nulles sur la frontière du support compact. En particulier, pour la fonction spline cubique, nous avons  $\beta = 2$ . Afin de faciliter l'écriture, nous introduisons  $\hat{W}_i(s) := hW(x - x_i, h)$ , où  $s = \frac{x - x_i}{h}$ , la forme adimensionnée de  $W$ .

Finalement, nous allons supposer que le support compact de  $W_i$  couvre exactement l'aire des particules  $j \in \mathcal{B}_i$ , voir la figure 4.1. Ceci veut dire que si une particule  $j$  est dans le voisinage de  $i$  alors le support compact de  $W_i$  la recouvre totalement et, similairement, si une particule  $k$  n'est pas dans le voisinage de  $i$  alors le support compact ne chevauche pas l'aire associée à  $j$ . Ainsi, lorsque  $W$  est symétrique, nous supposons :

$$\frac{h}{\Delta x} \in \left\{ \frac{2n+1}{4} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (4.1.33)$$

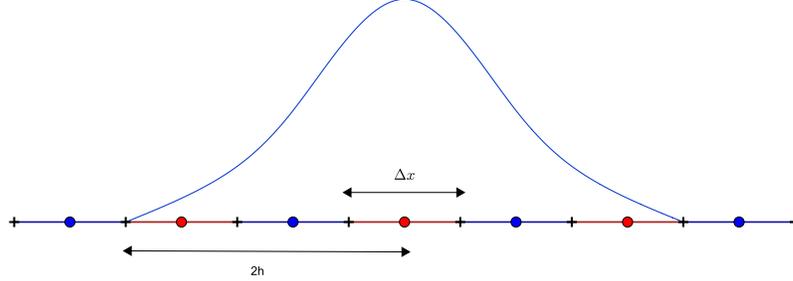


FIGURE 4.1. Exemple de  $h$  recherché

Dans de telles conditions, Quinlan *et al.* [34] ont démontré que l'erreur totale  $E_T$ , de l'approximation discrète de  $f(x_i)'$ , satisfait :

$$E_T = f(x_i)' - \sum_{j \in \mathcal{B}'_i} \Delta x f_j W'_j \quad (4.1.34)$$

$$= E_L + E_D \quad (4.1.35)$$

$$= -Ah^2 + \mathcal{O}(h^{\beta+2}) + B \left( \frac{h}{\Delta x} \right)^{-\beta-2} [C + \mathcal{O}(h^2)] + \mathcal{O} \left( \left[ \frac{h}{\Delta x} \right]^{-\beta-4} \right) \quad (4.1.36)$$

où  $E_L = -Ah^2 + \mathcal{O}(h^{\beta+2})$  est l'erreur de lissage et  $E_D = B \left( \frac{h}{\Delta x} \right)^{-\beta-2} [C + \mathcal{O}(h^2)] + \mathcal{O} \left( \left[ \frac{h}{\Delta x} \right]^{-\beta-4} \right)$  est l'erreur de discrétisation. Ici,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes qui dépendent de  $f$ ,  $\hat{W}$  et  $\beta$ . Ces constantes ne dépendent donc pas de  $\Delta x$  et de  $h$ . En particulier, pour la fonction spline cubique, on a :

$$E_t = -Ah^2 + \mathcal{O}(h^4) + B \left( \frac{h}{\Delta x} \right)^{-4} [C + \mathcal{O}(h^2)] + \mathcal{O} \left( \left[ \frac{h}{\Delta x} \right]^{-6} \right) \quad (4.1.37)$$

**Remarque 4.1.3.** *Le développement (4.1.37) est exact seulement lorsque la fonction de lissage est infiniment différentiable sur son support compact. En effet, il est nécessaire de faire un développement de Taylor pour obtenir cette formule. Or, la fonction de spline cubique est seulement  $C^2$  dans son support compact. Heureusement, Quinlan et al. [34] ont montré que, qualitativement, la fonction spline cubique et, plus généralement, les fonctions  $\beta$ -spline, satisfont tout de même (4.1.37).*

Une première chose que nous pouvons observer est que l'erreur dépend simultanément de  $h$  et du ratio  $\left( \frac{h}{\Delta x} \right)^{-1}$ . Ceci veut dire que, lorsque  $\left( \frac{h}{\Delta x} \right)^{-1} \rightarrow 0$ , l'erreur de lissage domine

avec  $h^2$ . Par contre, si  $h \rightarrow 0$  et  $\Delta x$  est fixé, l'erreur de discrétisation finira par dominer avec  $\left(\frac{h}{\Delta x}\right)^{-4}$ . Ainsi, il n'est pas suffisant d'avoir  $h \rightarrow 0$  pour obtenir une convergence d'ordre  $h^2$ , nous devons aussi veiller à ce que  $\frac{h}{\Delta x}$  diminue beaucoup moins rapidement que  $h$ .

**Remarque 4.1.4.** *Notons que cette analyse est valide seulement lorsque les particules sont uniformément distribuées. Avec notre schéma lagrangien, ceci ne reste pas vrai tout au long de la simulation. Selon Quinlan et al. [34], le fait que les particules soient désordonnées a pour effet de donner un terme d'erreur de discrétisation beaucoup plus complexe. Par contre, lorsque le désordre est léger, on peut observer, qualitativement, un comportement similaire au cas où les particules sont uniformément distribuées. En général, lorsque les particules sont légèrement désordonnées et que l'erreur de discrétisation domine, on observera que l'enveloppe de l'erreur suit une tendance proportionnelle à  $\left(\frac{h}{\Delta x}\right)^{-1}$ . Par contre, l'ordre peut être différent de ce que la théorie prévoit.*

#### 4.1.3.2. Résultats

Afin de comparer nos résultats avec ceux de Kéou Noutcheuwa [18], nous avons utilisé la norme moyenne quadratique pour calculer les erreurs :

$$E_{mq}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{|\Phi|}} \left( \sum_{i=1}^{|\Phi|} \left\| \underline{u}_a(\underline{x}_i, t^{n+1}) - \underline{u}_i^{n+1} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.38)$$

où,  $\underline{u}_a$  est la solution analytique donnée par (4.1.20) et  $|\Phi|$  est le nombre de particules dans le domaine de résolution.

Aussi, nous avons supposé une relation de proportionnalité  $\frac{h}{\Delta x} = k$  entre la longueur de lissage et la distance initiale entre les particules, tel que conseillé dans la littérature [13, 18, 34].

Pour valider le comportement de l'erreur de la méthode SPH, nous avons effectué une série de simulations pour observer la dépendance de l'erreur en fonction de  $k$ , pour différents  $\Delta x$  fixés.

D'abord, on observe, dans la figure 4.4, que lorsque  $k$  est suffisamment petit et que l'erreur de discrétisation domine et l'enveloppe de l'erreur à un comportement d'ordre  $\kappa^{-2}$ . Similairement, lorsque c'est l'erreur de lissage qui domine, l'enveloppe à un comportement d'ordre  $\kappa^2$ . Notons que la raison pour laquelle nous obtenons  $\kappa^{-2}$ , et non  $\kappa^{-4}$ , vient du désordre dans nos particules, tel qu'expliqué dans la remarque 4.1.4.

De plus, nous pouvons constater que l'erreur ne se comporte pas de façon monotone. En effet, on observe un comportement oscillatoire. Ceci est dû au fait que l'analyse d'erreur, fait par Quinlan *et al.* [34], est valable seulement lorsque le support compact de  $W_i$  contient exactement l'aire associée aux particules incluent dans le voisinage de  $i$ , ni plus ni moins. Ceci fait du sens, car lorsque nous discrétisons une intégrale, le choix de points de quadrature a un impact direct sur l'erreur obtenue. Pour  $\Delta x$  fixé, nous avons la longueur de lissage

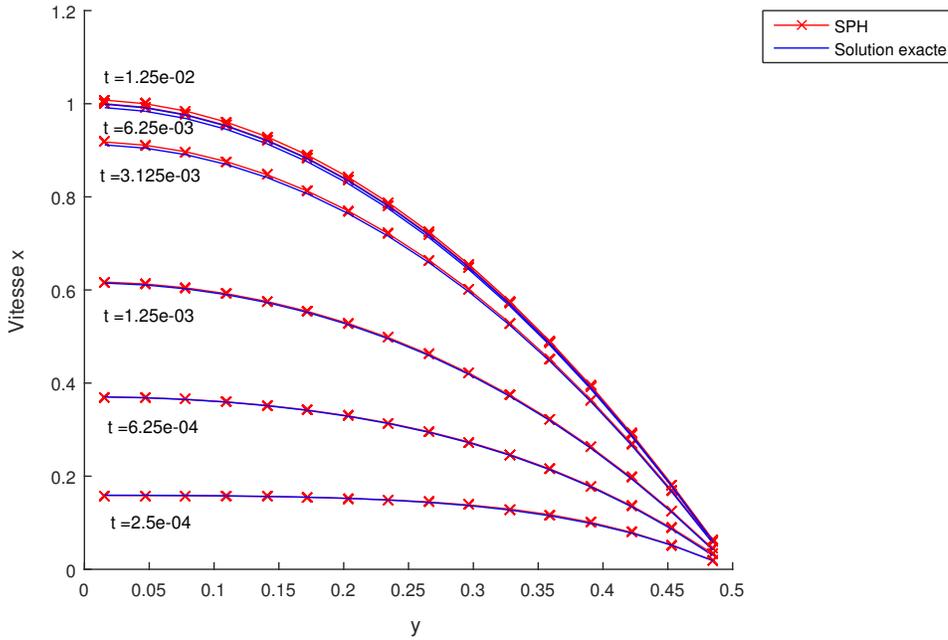


FIGURE 4.2. Profil de Poiseuille transitoire pour différents pas de temps. Ici,  $k = 1.75$  et  $\Delta x = \frac{1}{32}$

$h = k\Delta x$ . Ainsi, faire varier  $k$  change le rayon du support compact. Par conséquent, la formule d'erreur (4.1.37) n'est valide que pour les  $k$  correspondant aux rayons du support compact qui satisfont la contrainte sur les éléments d'aires. De plus, nous nous attendons à ce que ces valeurs de  $k$  optimisent l'erreur lorsque l'erreur de discrétisation domine. C'est d'ailleurs ce qui est observé dans nos simulations. En effet, le comportement local de l'erreur, là où l'erreur de discrétisation domine, change sur une période  $\Delta k$  correspondant à l'ajout d'une longueur  $\Delta x$  au rayon du support compact. Nous avons observé que, lorsque  $k$  est tel que le voisin le plus éloigné de  $i$  est à une distance  $\frac{\Delta x}{2}$  de la frontière du support de  $W_i$ , l'erreur se trouve près d'un minimum local. Similairement, l'erreur se retrouve sur un

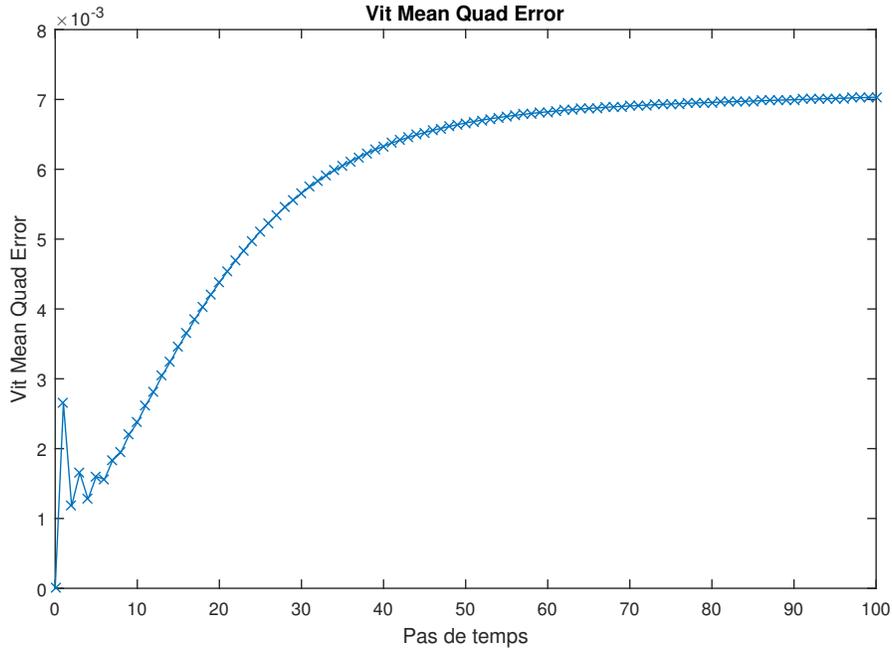


FIGURE 4.3. Comportement de l'erreur dans la solution transitoire de l'écoulement de Poiseuille pour  $k = 1.75$  et  $\Delta x = \frac{1}{32}$

maximum local lorsqu'une nouvelle particule traverse la frontière du support de  $W_i$ . Par contre, il y a un léger décalage entre les  $k$  associés aux minimums locaux et ceux que nous observons. Ceci est dû au fait que nous avons résolu le problème en deux dimensions. En effet, bien que nous ayons associé une aire de  $\Delta x^2$  à chacune des particules, il n'est plus aussi trivial de leur associer une région dans le domaine. Nous savons que la surface couverte par le support compact est un disque d'aire  $4\pi(k\Delta x)^2$ . Pour pouvoir avoir  $4\pi(k\Delta x)^2 = \sum_{j \in \mathcal{B}_i} \Delta x^2$ , la somme des aires des voisins de  $i$ , nous devons avoir  $4\pi k^2 = \sum_{j \in \mathcal{B}_i} 1$ . Ainsi,  $k$  ne peut pas

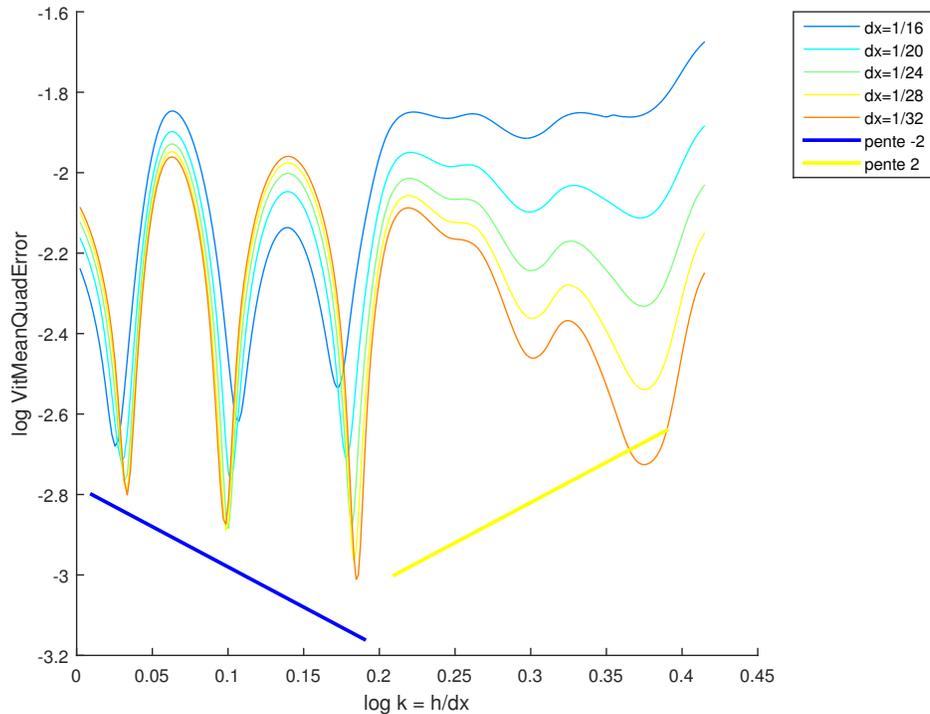


FIGURE 4.4. Erreur en fonction de  $k$  pour différents  $\Delta x$  fixé

être un nombre rationnel et, par conséquent, l'un des  $k$  décrits dans le cas unidimensionnel (4.1.33).

Aussi, on observe qu'il existe un minimum global de l'erreur. En effet, quand  $\Delta x$  est suffisamment petit, par exemple  $\Delta x = \frac{1}{32}$ , nous avons un minimum global en  $k \approx 1.52$ . Ceci correspond au point où l'erreur de discrétisation se met à dominer sur celle de lissage. Nous pouvons remarquer que ce minimum se déplace lorsque  $\Delta x$  varie. Ce minimum a été estimé à  $k \approx 1.43$  par Kéou Noutcheuwa [18]. Par contre, eux aussi ont obtenu de meilleurs résultats avec  $k \approx 1.52$ . La raison de cette différence provient probablement du fait que la formule de l'erreur (4.1.37) est seulement valide dans le cas unidimensionnel.

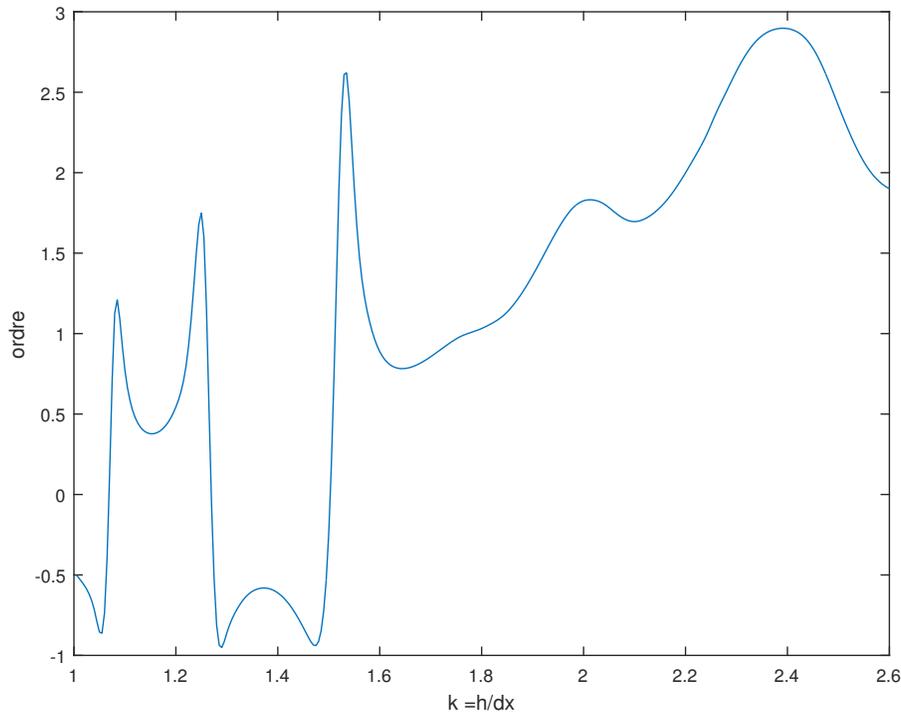


FIGURE 4.5. Ordre de convergence spatial en fonction de  $k$

Finalement, nous pouvons aussi remarquer, dans la figure 4.5 une alternance de signe pour l'ordre de convergence spatial, pour les valeurs de  $k$  inférieur à 1.52. Ceci semble, en partie, être une répercussion du fait que l'erreur de discrétisation ne domine pas au même moment pour différentes valeurs de  $\Delta x$ . En effet, pour  $\Delta x = \frac{1}{32}$ ,  $k = 1.52$  sépare la transition de comportement de l'enveloppe inférieure de l'erreur. Par contre, pour  $\Delta x = \frac{1}{16}$ , on remarque que l'enveloppe inférieure possède le comportement de l'erreur de lissage pour des valeurs de  $k$  beaucoup plus petites que 1.52.

Ainsi, en choisissant raisonnablement  $k$ , c'est-à-dire selon le critère d'inclusion d'aire dans le support compact, nous obtenons l'ordre de convergence  $\mathcal{O}(h^2)$ , et donc  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ . Un bon choix est de se limiter à des valeurs de  $k$  similaires à celles de (4.1.33). De plus,

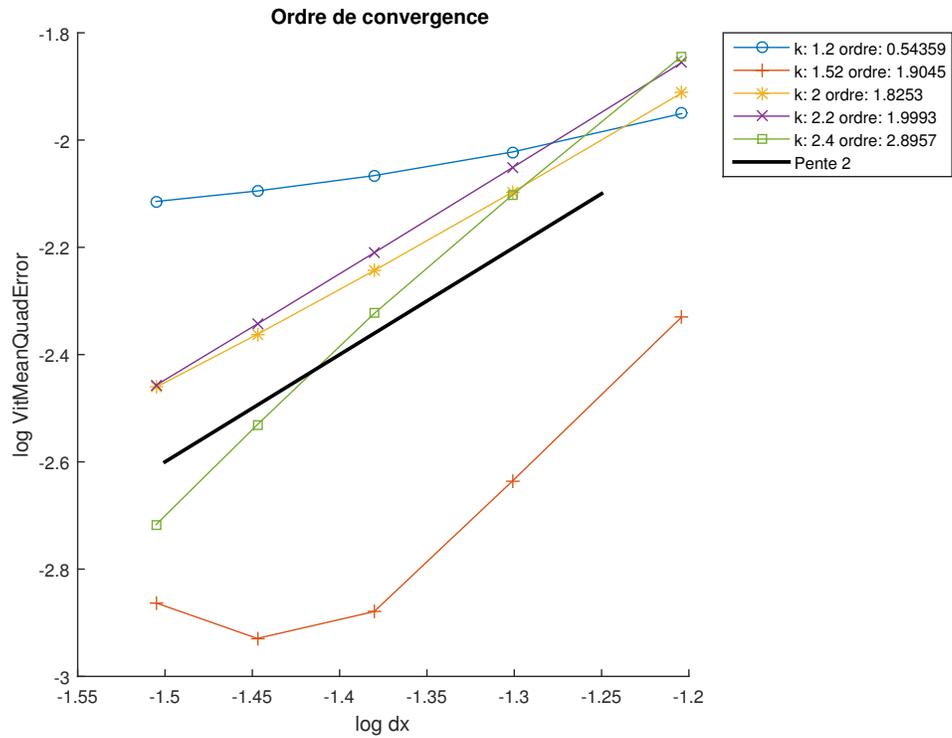


FIGURE 4.6. Ordre de convergence en fonction de  $\Delta x$  pour différentes valeurs de  $k$

comme nous pouvons l'observer dans la figure 4.6, il est possible de réduire considérablement l'erreur lorsque nous choisissons la valeur de  $k$  optimale, correspondant au changement de comportement de l'erreur. Par contre, dans un cas général, cette valeur peut être difficile à calculer et instable, c'est-à-dire que l'erreur change rapidement de comportement dans son voisinage. Ainsi, il est plus sage de se limiter à des valeurs de  $k$  plus élevées [34], par exemple dans les alentours de  $k = 1.75$ . Par contre, il est bien de noter que prendre  $k$  trop grand augmente considérablement le temps de calcul.

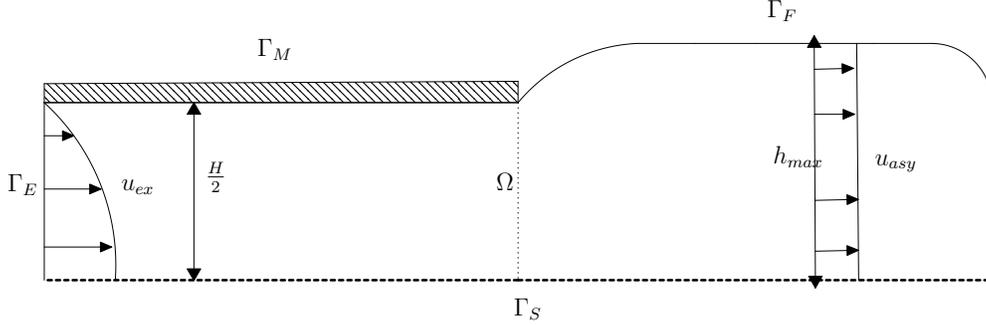


FIGURE 4.7. Géométrie du problème d'extrusion

## 4.2. PROBLÈME D'EXTRUSION

Dans cette section, nous allons tenter de simuler numériquement l'effet de gonflement d'un problème d'extrusion newtonien bidimensionnel provoqué par un écoulement de Poiseuille. Les simulations numériques de ce problème ont comme notoriété d'être très difficiles à effectuer. En effet, un saut dans le tenseur de contrainte apparaît à la sortie du tuyau. Ceci est dû à la transition subite dans les conditions aux limites, qui passent de celles de paroi solide à celles de surface libre [10].

Le problème d'extrusion, voir la figure 4.7, consiste en un fluide qui s'écoule dans un canal de largeur  $H$  semi-infini et tel qu'à la sortie du canal, l'écoulement se transforme en un problème de surface libre. Ainsi, le domaine se déforme au fur et à mesure que le temps avance, ce qui fait un bon candidat pour tester notre schéma lagrangien. Cet écoulement est engendré par un profil de Poiseuille stationnaire (4.1.11) à l'entrée du tuyau, c'est-à-dire à une distance infinie de la sortie du canal. Comme pour l'écoulement de Poiseuille, nous allons adimensionner le problème à l'aide de la longueur de référence  $H$  et la vitesse de référence  $U$  (4.1.12) correspondant à la vitesse maximale d'un écoulement de Poiseuille stationnaire.

**Remarque 4.2.1.** *Dans ce qui suit, toutes les variables rencontrées seront considérées adimensionnées.*

Bien que la complexité géométrique du domaine et la singularité rendent ce problème difficile à traiter analytiquement, nous pouvons tout de même nous donner une idée du comportement de la solution. En effet, l'amplitude du gonflement à la sortie du canal est, en partie, influencée par la transition du profil parabolique de Poiseuille du champ de vitesse dans la direction de l'écoulement vers un profil uniforme. Ainsi, en nous rappelant la solution stationnaire de l'écoulement de Poiseuille adimensionné (4.1.13), nous obtenons par

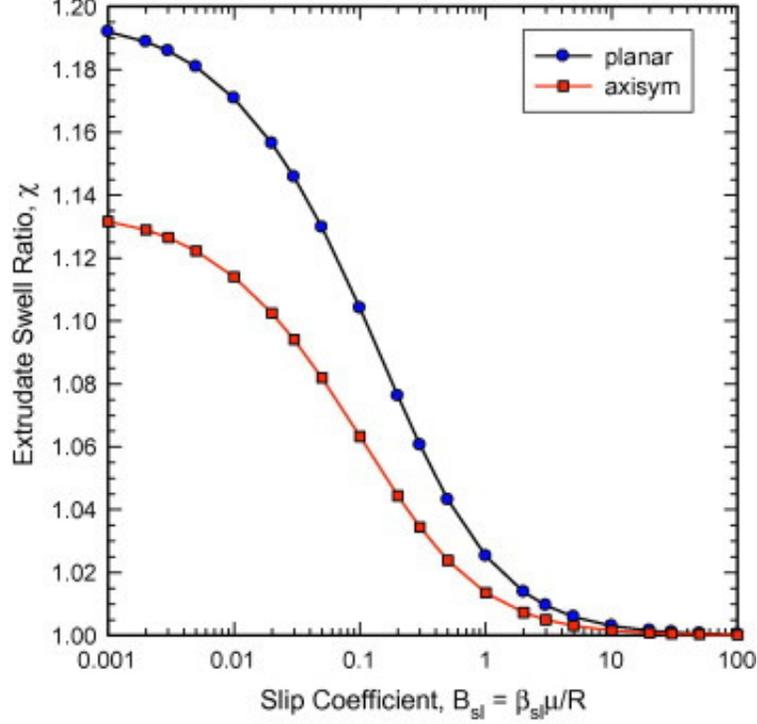


FIGURE 4.8. Taux de gonflement en fonction du coefficient de glissement pour  $Re = 0$ . Figure provenant de Mitsoulis *et al.* [28]

conservation de la masse :

$$u_{asy} = \frac{1}{2h_{max}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_{ex} dy = \frac{1}{2h_{max}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 - 4y^2 dy = \frac{1}{3h_{max}} \quad (4.2.1)$$

où  $u_{ex}$  est la solution stationnaire du profil de Poiseuille,  $u_{asy}$  et  $h_{max}$  sont la vitesse uniforme et, respectivement, la demi-largeur du gonflement complètement développé de la surface libre, voir la figure 4.7. Par la même occasion, nous définissons le taux de gonflement :

$$\chi_R := 2h_{max} \quad (4.2.2)$$

De (4.2.1), on remarque que la composante dans la direction de l'écoulement du champ de vitesse des particules près du centre du canal, c'est-à-dire, en  $y = 0$ , ralentiront et celles près de la partie supérieure du canal, accéléreront.

De plus, la singularité va induire une force de traînée qui fera gonfler la surface libre à la sortie du tuyau. En effet, dans un article récent Mitsoulis *et al.* [28] ont analysé le comportement du problème d'extrusion lorsqu'une condition de glissement est imposée au mur 4.8, résultant en une moins grande force de friction sur la paroi, et donc, une moins grande force de traînée. Les résultats qu'ils ont obtenus démontrent que plus le coefficient de glissement est élevé, moins le fluide gonfle hors du canal. En fait, lorsque le glissement est parfait, l'absence d'adhésion de la paroi résulte en une absence de gonflement.

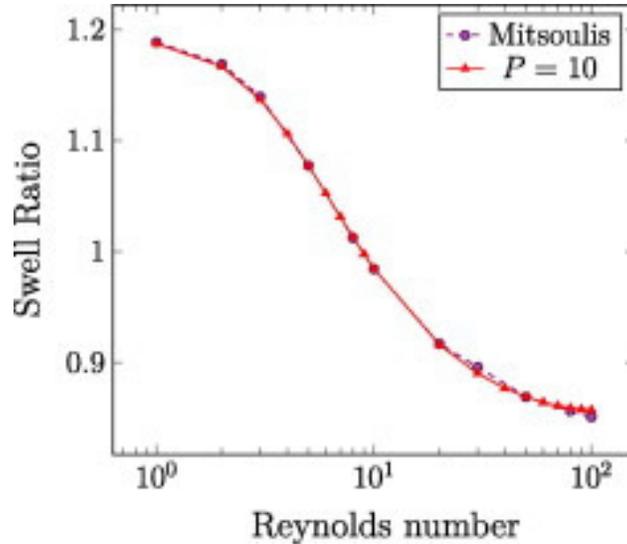


FIGURE 4.9. Taux de gonflement en fonction du nombre de Reynolds obtenue par Mitsoulis *et al.* [28] et Claus [10] pour un problème d’extrusion planeaire. Figure provenant de Claus [10]

Dans le cas d’un écoulement d’extrusion bidimensionnel, avec une tension superficielle négligeable et  $Re = 0$ , une extrapolation faite à partir de données expérimentales [39] prévoit un taux de gonflement  $\chi_R = 1.190 \pm 0.002$ . Ainsi,  $u_{asy}$  et  $h_{max}$  dépendent eux aussi du nombre de Reynolds et nous nous attendons à obtenir une vitesse uniforme  $u_{asy} = 0.56$  loin de la sortie du canal pour des valeurs de  $Re \approx 0$ .

En fait, plusieurs auteurs sont parvenus à valider cette prédiction à l’aide de simulations numériques. En particulier, Mitsoulis *et al.* [28] ont évalué, à l’aide de la méthode des éléments finis, le comportement de cet écoulement pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. Peu de temps après Claus [10], à l’aide d’une méthode des éléments finis spectral/hp, a corroboré ses résultats 4.9. Ainsi, leurs résultats prévoient un gonflement maximal lorsque  $Re \rightarrow 0$ , c’est-à-dire lorsque les forces visqueuses dominant dans l’écoulement. Ensuite, plus le nombre de Reynolds croît, moins la surface tend à gonfler. Finalement, lorsque les forces inertielles dominant, pour des nombres de Reynolds élevés  $Re \geq 10$  la surface va même jusqu’à se contracter.

Enfin, Sadek et Yildiz [36] ont utilisé la méthode WCPSH, c’est-à-dire une méthode SPH faiblement compressible [13], pour tenter de modéliser le problème d’extrusion planeaire. Ils ont effectué une simulation avec  $Re = 7 \times 10^{-4}$  et obtenu un taux de gonflement  $\chi_R = 1.065$ . Notons que, bien qu’un gonflement soit perceptible, il reste tout de même très éloigné des valeurs obtenues par Mitsoulis *et al.* [28] et Claus [10]. Finalement, Sadek et Yildiz [36] mentionnent un taux de gonflement théorique de  $\chi_R = 1.135$  obtenu expérimentalement par

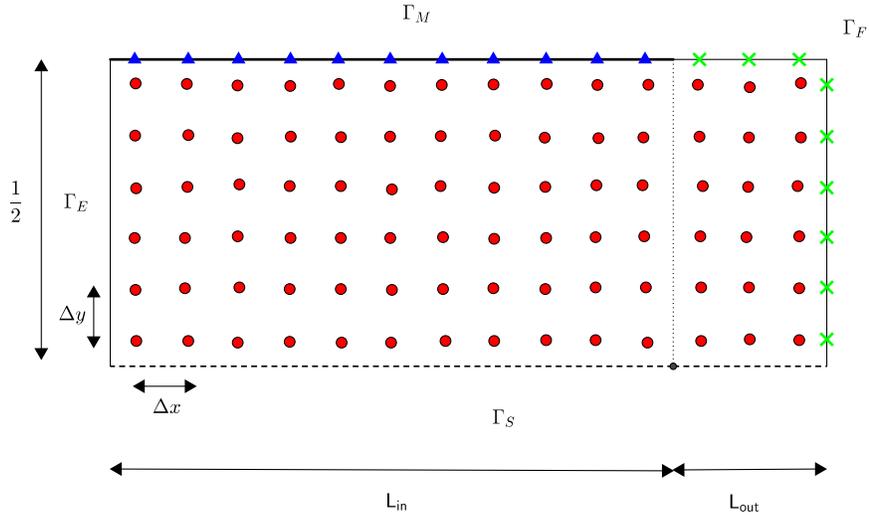


FIGURE 4.10. État initial du domaine de résolution

Batchelor *et al.* [3]. Par contre, ce résultat provient d'un écoulement axisymétrique, c'est-à-dire non bidimensionnel. D'ailleurs, cette valeur coïncide avec celle obtenue par Mitsoulis *et al.* [28] dans le cas axisymétrique sans glissement, voir la figure 4.8.

#### 4.2.1. Résolution numérique du problème d'extrusion

Pour résoudre numériquement le problème d'extrusion, nous allons considérer, comme domaine de résolution initial, un tuyau de longueur  $L_{in}$ , suffisamment long pour garantir un écoulement de Poiseuille complètement développé (4.1.13) sur la frontière artificielle d'entrée, voir la figure 4.10. En fait, nous voulons un canal suffisamment long pour que la singularité n'influence pas la frontière d'entrée. Notons que, dans un écoulement newtonien, les erreurs de discrétisation près de la singularité y restent confinées et ne remontent pas le long des lignes de courant [10]. Par conséquent, nous allons pouvoir nous satisfaire d'un canal relativement court. Aussi, nous commencerons la simulation avec une partie du fluide hors du tuyau, jusqu'à une distance  $L_{out}$ , pour éviter d'avoir un vide de particule images près de la singularité avec la méthode MBT. De plus, les particules seront uniformément distribuées dans ce domaine initial, de la même façon que lors du problème de Poiseuille. La géométrie du domaine de résolution initial est résumée dans la figure 4.10.

L'écoulement sera provoqué par un profil stationnaire de Poiseuille sur la frontière d'entrée  $\Gamma_E$ . On note que nous avons la solution stationnaire du problème de Poiseuille, donnée en fonction des champs auxiliaires introduits par la décomposition de Helmholtz-Hodge (1.3.9c)

et les conditions aux limites de paroi rigide 3.4.3 :

$$u^* = 1 - 4y^2 - \frac{\Delta t}{\text{Re}} 8 \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -8 \quad (4.2.4)$$

Ainsi, nous donnerons les valeurs exactes (4.1.13) et (4.2.3) aux particules d'entrée, voir la section 3.3.2 pour plus d'informations. En particulier, soit  $e$  une particule d'entrée, située en aval du domaine de résolution, et  $r$  son plus proche voisin dans le domaine de résolution. Puisque nous voulons imposer  $\partial_x \phi = -8$  sur la parabole d'entrée, mais que nous ne connaissons pas encore les valeurs de  $\phi$  dans le domaine lors de la résolution, Nous allons imposer la valeur  $\phi_e = -8(x_e - x_r) + \phi_r$  à la particule d'entrée. Ceci va nous permettre de résoudre implicitement le problème de Poisson près de l'entrée en nous assurant que la condition sur  $\phi$  y est bien imposée. Par contre, il est bien de noter que cette approche tend à rendre la matrice de résolution de  $\phi$  mal conditionnée. En effet, avec cette méthode la colonne de particules du domaine de résolution longeant la frontière d'entrée se voit déterminer les valeurs à imposer aux  $\phi$  de toutes les particules d'entrées. Ainsi, les éléments diagonaux de ces particules, dans la matrice de résolution pour  $\phi$ , sont de magnitude beaucoup plus élevée que les autres valeurs de la matrice. Une alternative serait d'utiliser une valeur de  $\phi_r$  provenant d'une itération précédente dans la méthode Broyden, voir la section 3.5, afin de fixer les valeurs de  $\phi$  à l'entrée lors de chacune des itérations.

La paroi solide  $\Gamma_M$  et la surface libre  $\Gamma_F$  seront traitées avec la méthode MBT, voir la section 3.2.2. Aussi la ligne de symétrie et ses interactions avec la surface libre seront traitées comme discuté dans les sections 3.3.4 et 3.4.5. Finalement, les conditions initiales seront celles d'un écoulement stationnaire de Poiseuille.

Puisque le comportement de la surface libre dépend majoritairement du nombre de Reynolds, nous avons décidé d'utiliser les mêmes paramètres que lors de la résolution du problème de Poiseuille. Ainsi, les paramètres physiques que nous avons choisi pour la résolution sont :  $\text{Re} = 1.25 \times 10^{-2}$ ,  $H = 10^{-3}m$ ,  $\rho = 10^3 kgm^2$  et  $\eta = 10^{-3} kgm^{-1}s^{-1}$ . Ceci donne comme vitesse de référence  $U = 1.25 \times 10^{-5} ms^{-1}$ . De plus, nous avons utilisé les longueurs adimensionnées  $L_{in} = 2.5$ , soit 5 fois le rayon du tube, et  $L_{out} = 0.5$ . Nous avons choisi ces longueurs après avoir effectué plusieurs simulations. Au final, elles se sont avérées suffisantes pour conserver un profil de Poiseuille à l'entrée tout au long de la simulation en plus de ne pas être trop lourdes en calculs. De plus, les particules sont distribuées uniformément dans le domaine avec  $\Delta x = \frac{1}{24} = \Delta y$ . Aussi, nous avons choisi la distance de lissage  $h = 1.75\Delta x$  afin de nous assurer que l'erreur de discrétisation de la méthode SPH ne domine pas sur l'erreur de lissage. Finalement, nous avons pris le pas de temps  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$  et la simulation s'effectue jusqu'à ce que le taux de gonflement  $\chi_R$  atteigne un plateau.

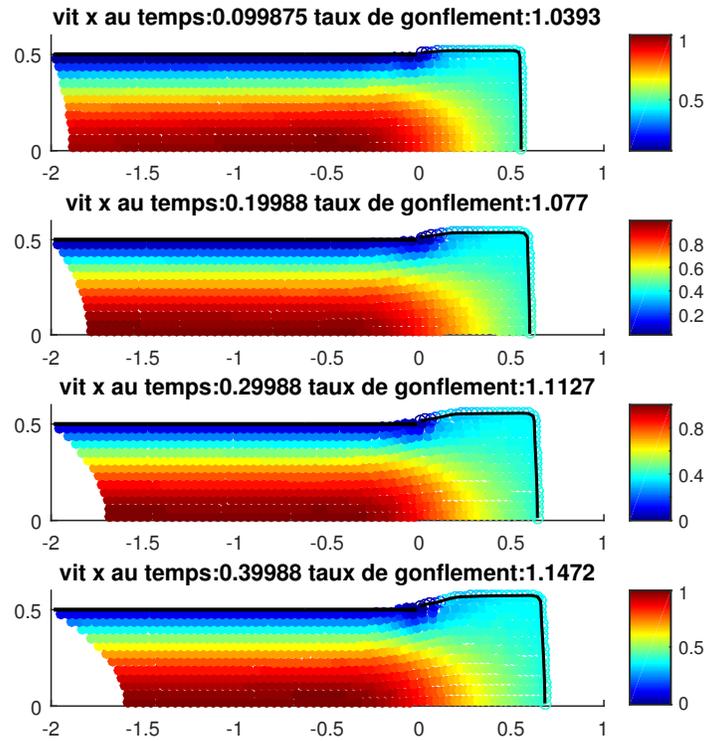


FIGURE 4.11. Composante en  $x$  du champ de vitesse à différents pas de temps

**Remarque 4.2.2.** *Puisque les marqueurs de la frontière libre vont se déplacer, un vide de marqueur sur la frontière libre va se créer près de la singularité, au fur et à mesure que la simulation avance. De plus, puisque la surface libre gagne en longueur, nous devons ajouter de plus en plus de marqueurs frontières pour garder une distance inter marqueur proportionnelle à  $\Delta x$ . Ainsi, nous allons reformer la surface libre en utilisant une interpolation spline cubique pour y créer des marqueurs uniformément distribués.*

**Remarque 4.2.3.** *Afin d'accélérer les calculs, nous avons décidé de ne pas recalculer les voisinages de particules, recréer les particules images et reformer la surface libre à chacune des itérations. Ainsi, nous avons choisi d'actualiser la simulation seulement au 25 pas de temps. En effet, puisque le pas de temps est petit, la différence de voisinage  $y$  reste négligeable.*

#### 4.2.2. Résultats, conclusions et solutions potentielles

Maintenant vient le temps de discuter des résultats. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à exécuter la simulation jusqu'à sa convergence. En effet, des problèmes près de la singularité introduisent des instabilités et rendent les matrices de résolutions mal conditionnées. Tout de même, nous allons commenter nos résultats obtenus, bien que partiels, et discuter de solutions potentielles aux problèmes que nous avons rencontrés.

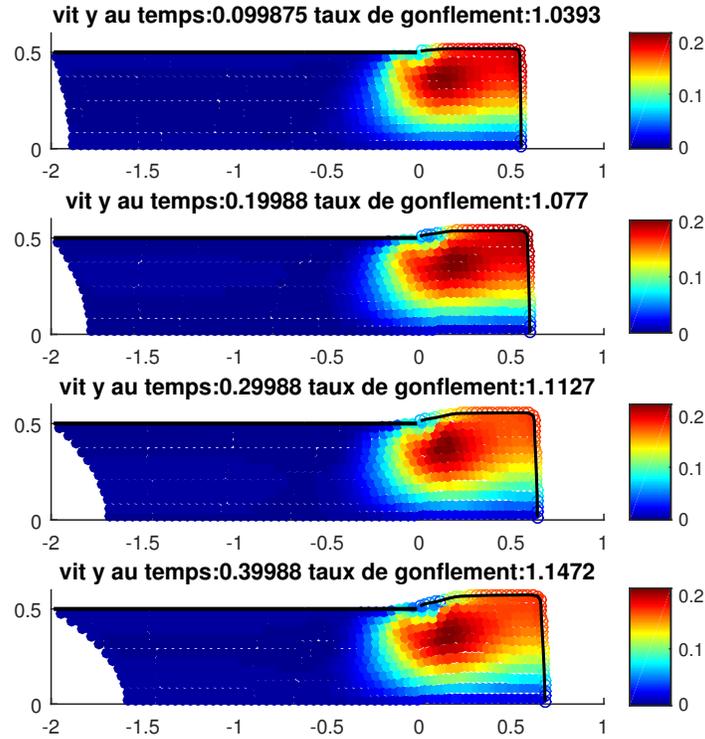


FIGURE 4.12. Composante en  $y$  du champ de vitesse à différents pas de temps

Comme nous pouvons l'observer dans la figure 4.11, nous avons atteint un taux de gonflement de  $\chi_R = 1.1472$  avant l'échec de notre simulation. Par contre, en consultant la figure 4.12, on remarque que la surface libre n'avait pas encore terminé son gonflement.

Aussi, on remarque que le champ de vitesse  $u_x^{n+1}$  s'uniformise à l'extérieur du canal. Par contre, la vitesse s'approche de la valeur uniforme 0.45. Ceci est problématique, car pour un nombre de Reynolds  $Re \approx 0$ , nous nous attendions à une valeur voisinant 0.55. En se rapportant à 4.2.1, ceci semble suggérer que nous avons une perte de masse dans notre domaine et donc, une perte d'incompressibilité.

Ceci nous amène à discuter du comportement du champ de vitesse près de la singularité. À l'aide des figures 4.11 et 4.12, nous remarquons que le champ de vitesse des particules près de la singularité a tendance à diminuer avec le temps. De plus, on remarque que les particules situées près de la fin du canal ont tendance à s'approcher de la paroi solide et vont même jusqu'à la traverser. Ceci a pour effet de raréfier les particules situées immédiatement après la singularité près de la surface libre, entraînant une perte de l'incompressibilité. C'est d'ailleurs ce que nous observons dans la figure 4.13. Ainsi, nous sommes d'avis que le comportement des particules près de la singularité tend à augmenter la force de traînée exercée sur la surface libre, provoquant une augmentation du gonflement attendu. De plus, puisque les particules

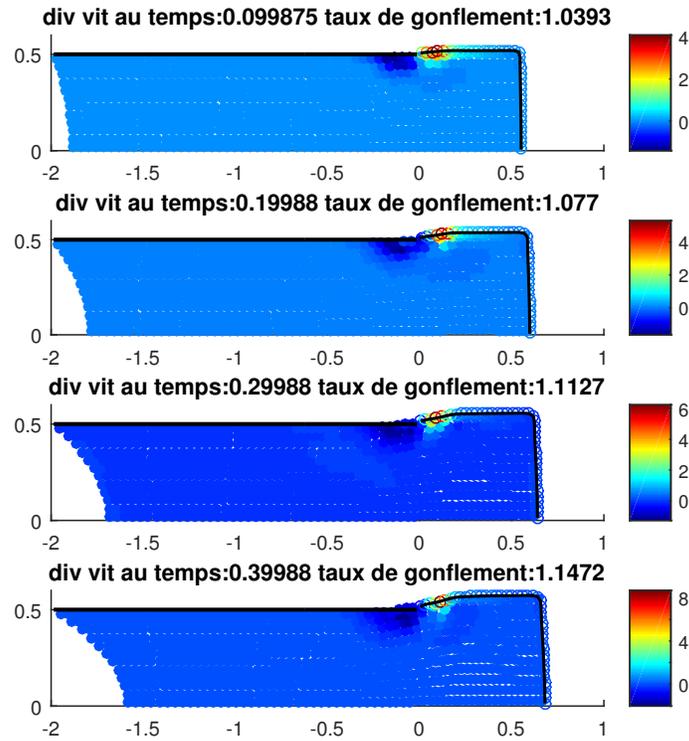


FIGURE 4.13. Divergence du champ de vitesse à différents pas de temps

ne sont plus uniformément distribuées, l'erreur relative à la méthode SPH est accrue près de la singularité.

D'un autre coté, nous pouvons remarquer que le champ de pression se comporte de la même manière que ceux obtenus par Claus [10]. Par contre, on observe tout de même une légère chute de pression, immédiatement après la singularité. Ceci est cohérent avec la raréfaction des particules à cet endroit.

Pour ce qui est du tenseur des extra contraintes, bien que son allure globale semble concorder avec les résultats de Sadek [35], on observe tout de même des problèmes dans le voisinage de la singularité.

Nous concluons donc que la perte de l'incompressibilité dans le voisinage de la singularité est la cause première des problèmes observés dans nos simulations. Par conséquent, un meilleur traitement de la singularité sera nécessaire pour la résolution du problème d'extrusion avec notre schéma. Nous allons maintenant discuter de solutions possibles à cette problématique.

En premier lieu, il est clair que les conditions aux limites ne sont pas exactement satisfaites pour les marqueurs frontières près de la singularité. En effet, comme nous en avons déjà discuté, nous observons des particules qui traversent la paroi solide dans cette région, étant influencées par les conditions sur la surface libre. Ceci est une conséquence de la méthode

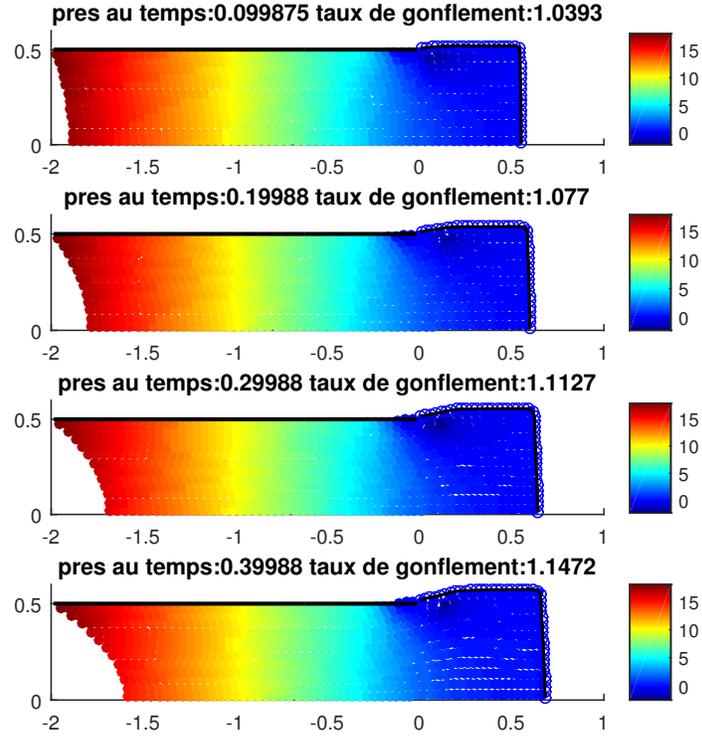


FIGURE 4.14. Champ de pression à différents pas de temps

MBT et du fait que le support compact de la fonction de lissage soit de rayon constant pour toutes les particules. Ainsi, une approche visant à utiliser un rayon de longueur variable pourrait certainement nous aider à mieux traiter la singularité. En effet, nous pourrions prendre des rayons de plus en plus petits au fur et à mesure que nous approchons de la singularité, d'une manière similaire au raffinement d'un maillage près d'une singularité dans la méthode des éléments finis [10]. Par contre, puisque l'erreur est proportionnelle au ratio entre le rayon et  $\Delta x$ , il serait beaucoup plus compliqué de s'assurer d'avoir assez de particules dans le support compact des particules près de la singularité pour obtenir une convergence satisfaisante.

En second lieu, il serait possible d'éviter le problème des particules qui traversent la paroi solide en ne considérant pas le mur et la surface libre comme étant deux frontières distinctes. Par exemple, nous pourrions considérer une unique frontière possédant une condition aux limites de type Robin. Soit  $f$  une fonction scalaire sur le domaine  $\Omega$  et  $g$  une fonction scalaire sur la frontière  $\Gamma_R$ . Aussi, soit  $A$  et  $B$  des fonctions scalaires définies sur  $\Gamma_R$ . Une **condition aux limites de type Robin** sur  $f$  est une combinaison linéaire d'une condition de Dirichlet (3.4.1) d'une condition de Neumann (3.4.5) sur la frontière :

$$A(\underline{x})f(\underline{x}) + B(\underline{x})\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \hat{n}} = g(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma_R \quad (\text{Condition de Robin}) \quad (4.2.5)$$

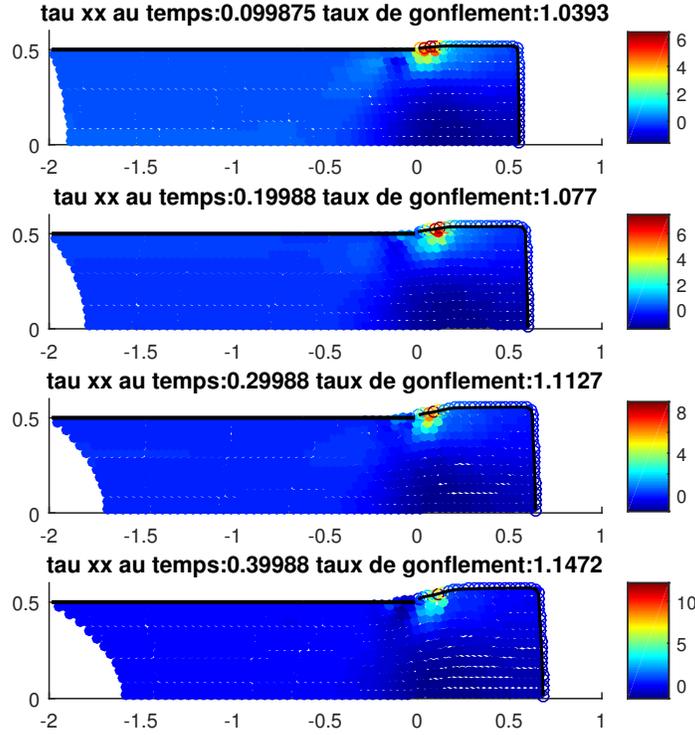


FIGURE 4.15. Composante  $xx$  du tenseur des extra-contraintes à différents pas de temps

Ainsi, en choisissant des fonctions  $A$ ,  $B$  et  $g$  permettant une transition lisse des conditions de paroi solide 3.4.3 vers celles de surface 3.4.4, il est possible de traiter toute la frontière d'un seul coup. Cette approche, visant à lisser la transition entre les frontière, semble compatible avec l'aspect lissant de la méthode SPH. De plus, il est facile d'adapter les méthodes IP 3.2.1 et MBT 3.2.2 pour imposer des conditions aux limites de Robin. Soit  $i'_b$  une particule imaginaire, obtenue de la méthode IP 3.2.1 ou bien MBT 3.2.2, et son doublet associé  $\{i, i_b\}$ . Par extrapolation linéaire et différence centrée, dans la direction normale, autour de  $i_b$ , nous obtenons la valeur à imposer à la particule imaginaire  $i'_b$  :

$$f_{i'_b} = 2 \left( \frac{r_{ii_b}}{A_{i_b} r_{ii_b} + B_{i_b}} \right) g_{i_b} - \left( \frac{A_{i_b} r_{ii_b} - B_{i_b}}{A_{i_b} r_{ii_b} + B_{i_b}} \right) f_i \quad (4.2.6)$$

On peut généraliser pour un champ vectoriel ou bien tensoriel en le traitant composante par composante. Enfin, nous argumentons qu'utiliser des conditions de Robin aura pour effet d'avoir une frontière qui n'est pas totalement immobile près de la singularité et qui se déplace de manière cohérente avec les particules du domaine. Ainsi, cette approche risque de conserver l'uniformité des particules dans la zone de transition, en plus de s'assurer qu'elles ne traverseront pas la frontière. D'un autre côté, ce nouveau problème n'est qu'une approximation du problème original. Ainsi, la convergence vers le problème original est possible

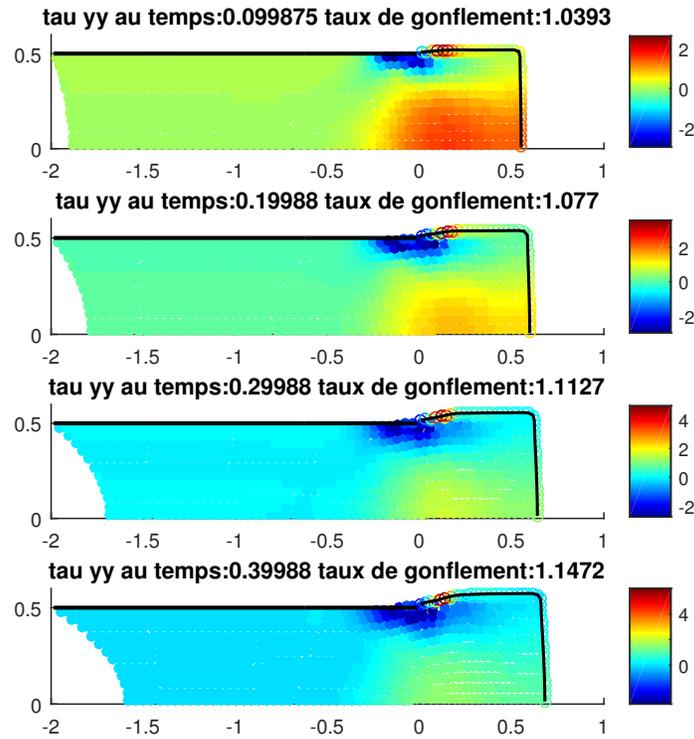


FIGURE 4.16. Composante  $yy$  du tenseur des extra-contraintes à différents pas de temps

seulement lorsque les fonctions  $A$  et  $B$  seront les fonctions indicatrices de la paroi solide et de la surface libre, respectivement. De plus, puisque cette méthode lisse la singularité, il ne serait guère surprenant d'obtenir des gonflements moins prononcés que ce qui est attendu dans le problème original.

Finalement, il serait probablement une bonne idée de séparer les particules à l'intérieur du domaine en plusieurs catégories, définissant quels seront les marqueurs frontières qui auront une influence sur eux. Ainsi, nous pourrions décider que les particules à l'intérieur du tuyau ne sentent que l'influence des marqueurs sur la paroi solide et, similairement, que les particules à l'extérieur du tuyau ne sentent que l'influence des marqueurs sur la surface libre. Par contre, il n'est pas évident de partitionner le domaine de manière à ce que le problème résolu approxime bien le problème original. En effet, pour différents nombres de Reynolds la surface libre va se comporter différemment. Par exemple, pour  $Re \geq 10$  nous obtenons  $\chi_R < 1$  [10, 28] et le fluide se contracte à la sortie de tuyau. Dans ce cas, les particules à l'intérieur du canal qui sont situées près de la paroi devraient être déviées vers le bas par la surface, et donc sentir son influence.

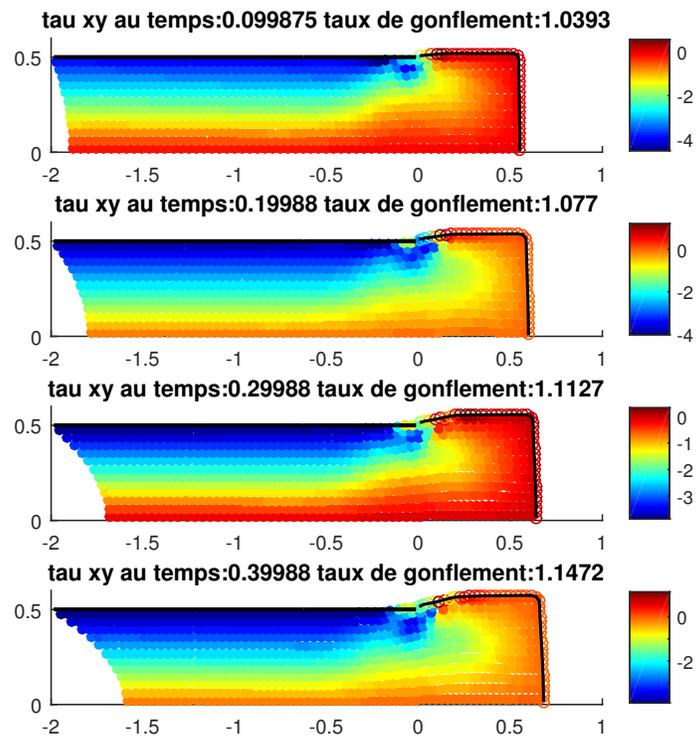


FIGURE 4.17. Composante  $xy$  du tenseur des extra-contraintes à différents pas de temps



# CONCLUSION

---

Somme toute, nous avons développé dans ce travail une nouvelle méthode pour imposer les conditions aux limites de surface libre dans la méthode PSPH. Ce faisant, nous avons tenté de valider notre schéma numérique à l'aide du problème d'extrusion newtonien bidimensionnel. Par contre, bien que le comportement de la surface libre soit satisfaisant, l'application de notre schéma a été polluée par un problème de gestion de transition des conditions aux limites sur la singularité, causant une perte d'incompressibilité et une raréfaction des particules à la sortie du canal.

Ainsi, dans nos recherches futures, nous allons concentrer nos énergies sur la résolution de ce problème en testant les solutions possibles que nous avons mentionnées dans la section 4.2.2. Une fois ce problème résolu, nous allons effectuer une série de simulations afin d'étudier le comportement du gonflement pour divers nombres de Reynolds et comparer nos résultats avec ceux de Mitsoulis *et al.* [28] et de Claus [10].



## Bibliographie

---

- [1] DJ ACHESON : *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [2] C AMROUCHE, C BERNARDI, M DAUGE et V GIRAULT : Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9):823–864, 1998.
- [3] J BATCHELOR, JP BERRY et F HORSEFALL : Die swell in elastic and viscous fluids. *Polymer*, 14(7):297–299, 1973.
- [4] M BENNOUNE, J MORIN-DROUIN et RG OWENS : On the jump conditions for an immersed interface method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 38(3):A1280–A1316, 2016.
- [5] H BHATIA, G NORGDARD, V PASCUCCI et PT BREMER : The Helmholtz-Hodge decomposition — a survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 19(8):1386–1404, 2013.
- [6] F BIERBRAUER, PC BOLLADA et TN PHILLIPS : A consistent reflected image particle approach to the treatment of boundary conditions in smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41):3400–3410, 2009.
- [7] DL BROWN, R CORTEZ et ML MINION : Accurate projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 168(2):464–499, 2001.
- [8] AJ CHORIN : Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104):745–762, 1968.
- [9] AJ CHORIN et JE MARSDEN : *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, volume 3. Springer, 1990.
- [10] S CLAUS : *Numerical simulation of complex viscoelastic flows using discontinuous galerkin spectral/hp element methods*. Thèse de doctorat, Cardiff University, Cardiff, Wales, 2013.
- [11] SJ CUMMINS et M RUDMAN : An SPH projection method. *Journal of Computational Physics*, 152(2):584–607, 1999.
- [12] WD EVANS : *Partial Differential Equations*. Wiley Online Library, 1988.

- [13] RA GINGOLD et JJ MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3):375–389, 1977.
- [14] GH GOLUB et JM ORTEGA : *Scientific Computing and Differential Equations : an Introduction to Numerical Methods*. Academic Press, 2014.
- [15] YF GUI et WB DOU : A rigorous and completed statement on Helmholtz theorem. *Progress in Electromagnetics Research*, 69:287–304, 2007.
- [16] CW HIRT et JP SHANNON : Free-surface stress conditions for incompressible-flow calculations. *Journal of Computational Physics*, 2(4):403–411, 1968.
- [17] J KIM et P MOIN : Application of a fractional-step method to incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59(2):308–323, 1985.
- [18] RG KÉOU NOUTCHEUWA : *Une nouvelle méthode smoothed particle hydrodynamics : simulation des interfaces immergées et de la dynamique Brownienne des molécules avec des interactions hydrodynamiques*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 2013.
- [19] RG KÉOU NOUTCHEUWA et RG OWENS : A new incompressible smoothed particle hydrodynamics-immersed boundary method. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 3(2):126–167, 2012.
- [20] OA LADYZHENSKAYA et RA SILVERMAN : *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon & Breach New York, 1969.
- [21] L LEE et RJ LEVEQUE : An immersed interface method for incompressible Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(3):832–856, 2003.
- [22] GR LIU et MB LIU : *Smoothed Particle Hydrodynamics : A Meshfree Particle Method*. World Scientific, 2003.
- [23] MB LIU et GR LIU : Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 56(1):19–36, 2006.
- [24] MB LIU et GR LIU : Smoothed particle hydrodynamics (SPH) : an overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(1):25–76, 2010.
- [25] X LIU, H XU, S SHAO et P LIN : An improved incompressible SPH model for simulation of wave–structure interaction. *Computers & Fluids*, 71:113–123, 2013.
- [26] LB LUCY : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82:1013–1024, 1977.
- [27] F MARIA DENARO : On the application of the Helmholtz–Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43(1):43–69, 2003.
- [28] E MITSOULIS, GC GEORGIU et Z KOUNTOURIOTIS : A study of various factors affecting Newtonian extrudate swell. *Computers & Fluids*, 57:195–207, 2012.
- [29] JJ MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30(1):543–574, 1992.

- [30] JJ MONAGHAN : Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110(2):399–406, 1994.
- [31] JJ MONAGHAN : Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68(8):1703, 2005.
- [32] JP MORRIS, PJ FOX et Y ZHU : Modeling low reynolds number incompressible flows using SPH. *Journal of Computational Physics*, 136(1):214–226, 1997.
- [33] JR PACHECO : The solution of viscous incompressible jet flows using non-staggered boundary-fitted co-ordinate methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 35(1):71–91, 2001.
- [34] NJ QUINLAN, M BASA et M LASTIWKA : Truncation error in mesh-free particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(13):2064–2085, 2006.
- [35] SH SADEK : Modeling die swell of second-order fluids using SPH. Mémoire de D.E.A., Sabanci University, Istanbul, Turkey, 2010.
- [36] SH SADEK et M YILDIZ : Modeling die swell of second-order fluids using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Fluids Engineering*, 135(5):051103, 2013.
- [37] MS SHADLOO, A ZAINALI, SH SADEK et M YILDIZ : Improved incompressible smoothed particle hydrodynamics method for simulating flow around bluff bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9):1008–1020, 2011.
- [38] S SHAO et EYM LO : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources*, 26(7):787–800, 2003.
- [39] RI TANNER : *Engineering Rheology*, volume 52. OUP Oxford, 2000.
- [40] N TOFIGHI et M YILDIZ : Numerical simulation of single droplet dynamics in three-phase flows using ISPH. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(4):525–536, 2013.
- [41] D VIOLEAU et BD ROGERS : Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for free-surface flows : past, present and future. *Journal of Hydraulic Research*, 54(1):1–26, 2016.
- [42] B YANG et A PROSPERETTI : A second-order boundary-fitted projection method for free-surface flow computations. *Journal of Computational Physics*, 213(2):574–590, 2006.
- [43] M YILDIZ, RA ROOK et A SULEMAN : SPH with the multiple boundary tangent method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(10):1416–1438, 2009.